STUDIA I PRACE WYDZIAŁU NAUK EKONOMICZNYCH I ZARZĄDZANIA NR 31

Ryszard Antoniewicz
Wałbrzyska Wyższa Szkoła
Zarządzania i Przedsiębiorczości

O PRZECIĘTNEJ

Streszczenie

Definicja wartości przeciętnej oparta na całce Lebesgue'a ma tę wadę, że nie ma bezpośredniej interpretacji probabilistycznej. W artykule zaproponowano koncepcję aproksymacji opartą na innej definicji wartości przeciętnej zmiennej losowej.

Słowa kluczowe: przeciętna, zmienna losowa, moment zmiennej losowej.

Po ukształtowaniu się teorii miary i całki Lebesgue'a idee tych teorii bardzo szybko przeniknęły do innych obszarów matematyki. Trójkę (X, A, μ), gdzie X jest dowolnym zbiorem, A – przeliczalnie addytywną algebrą jego podzbiorów, a μ – miarą, nazywa się przestrzenią mierzalną. Funkcję rzeczywistą f: $X \rightarrow R$ nazywa się mierzalną, jeśli dla każdego zbioru borelowskiego B z prostej $f^{1}(B) \in A$. Dla funkcji mierzalnej f ma sens całka Lebesgue'a $\int f(x)\ \mu(\mathrm{d}x)$. Całkę $\int f^{p}(x)\ \mathrm{d}\mu(x)$, $p = 0, 1, 2, ...$, nazywa się momentem rzędu p funkcji f [2].

W teorii aproksymacji mówi się, że liczba m aproksymuje funkcję f, jeśli [4]

$$\min_{a} \int (f(x) - a)^2\, \mu(dx) = \int (f(x) - m)^2\, \mu(dx).$$

Po powstaniu teorii miary i całki Lebesgue'a wielu matematyków, między innymi S. Banach i jego przyjaciele, matematycy ze Lwowa, zauważyli, że na tych samych zasadach można oprzeć rachunek prawdopodobieństwa. Nie opublikowali jednak tego spostrzeżenia, lecz zrobił to rosyjski matematyk A. Kolmogoroff, w książce wydanej w języku niemieckim [1].

Trójkę (Ω, A, P) gdzie Ω jest zbiorem zdarzeń elementarnych, A – przeliczalnie addytywną algebrą podzbiorów zbioru Ω, zwanych zdarzeniami, P – miarą probabilistyczną na algebrze zdarzeń, nazywamy przestrzenią probabilistyczną. Funkcję X: $\Omega \rightarrow \mathrm{R}$ nazywa się zmienną losową, jeśli dla dowolnego zbioru borelowskiego z prostej $X^{-1}(B) \in A$. Inaczej mówiąc, zmienna losowa jest to funkcja mierzalna na przestrzeni probabilistycznej. Całkę Lebesgue'a $\int X(\omega)P(d\omega) = M(X)$ nazywa się wartością przeciętną zmiennej losowej X. Całkę $\int X^p(\omega)P(d\omega)$, $p = 0, 1, 2, \ldots$, nazywa się momentem rzędu p zmiennej losowej X.

Definicja wartości przeciętnej przez całkę Lebesgue'a ma ten mankament, że nie daje bezpośredniej interpretacji probabilistycznej. W artykule zaproponowano inną definicję, opartą na pojęciu aproksymacji.

Wartością przeciętną zmiennej losowej X, mającej drugi moment, nazywamy liczbę $M(X)$ aproksymującą tę zmienną losową, czyli

$$\min_a \int (X-a)^2 P(d\omega) = \int (X - M(X))^2 P(d\omega).$$

Łatwo się przekonać, że definicja ta nie odbiega od starej definicji. W tym celu wystarczy znaleźć minimum powyższej całki przez przyjęcie, że całkę można zróżniczkować po parametrze, a następnie znajdując zero jej pochodnej:

$$\left(\int (X-a)^2 P(d\omega)\right)'_a = \left(\int X^2 P(d\omega) - 2a \int X P(d\omega) + a^2\right)'_a = -2 \int X P(d\omega) + 2a = 0,$$

gdzie $a = M(X) = \int X P(\mathrm{d}\omega)$. Można powiedzieć, że całka Lebesgue'a zmiennej losowej najlepiej aproksymuje tę zmienną losową. Przedstawiona definicja wartości przeciętnej zmiennej losowej ogranicza się do zmiennych losowych mających drugi moment.

Nowa definicja wartości przeciętnej pozwala uogólnić pojęcie przeciętna na przypadek tak zwanej dwuprzeciętnej, trzyprzeciętnej… Przykładowo, dwie liczby m_1, m_2 stanowią dwuprzeciętną zmiennej losowej X, jeśli

$$\min_{a,b} \int ((X-a)(X-b))^2 P(d\omega) = \int ((X-m_1)(X-m_2))^2 P(d\omega).$$

Powyższe minimum można znaleźć. Okazuje się, że biprzeciętną określają trzy pierwsze momenty [3]. Wieloprzeciętne mogą mieć znaczenie praktyczne, jako że często napotykane są tak zwane rozkłady wielomodalne i wiadomo, że modę trudno jest oszacować na podstawie próbki losowej. Łatwo jest natomiast oszacować momenty. Na podstawie prostych wzorów można oszacować dwuśrednią i przyjąć, że dają one oszacowania obu mód.

Literatura

1. Antoniewicz R., *O średnich i przeciętnych*, WAE ,Wrocław 2005.
2. Hartman S., Milusiński J., *Teoria miary i całki Lebesgue'a*, PWN, Warszawa 1957.
3. Kolmogoroff A., *Uber die analitischen Methoden In der Wahrscheinlichkeitrechnung*, „Math. Ann." 1931, 104.
4. Smoluk A., *Podstawy teorii aproksymacji i s-funkcje*, PWN, Warszawa 1974.

ABOUT THE AVERAGE

Summary

The definition of the average value by the Lebesgue integral has the drawback that there is no direct probabilistic interpretation. In this work we propose the concept of approximation based on a different definition of the average value of random variable.

Keywords: average value, random variable, moments of random variable.

Translated by Beata Antoniewicz-Nogaj