

**Ewa Dziawgo**

Uniwersytet Mikołaja Kopernika w Toruniu

## **ANALIZA WRAŻLIWOŚCI CENY OPCJI O UWARUNKOWANEJ PREMII**

### **Streszczenie**

W artykule przedstawiono zagadnienia związane z opcjami o uwarunkowanej premii: charakterystyka instrumentu, rodzaje opcji, funkcje wypłaty, modele wyceny oraz analiza porównawcza kształtowania się cen i wartości greckich parametrów (*delta*, *gamma* i *vega*) opcji zwykłych i opcji o uwarunkowanej premii. Ilustrację empiryczną przeprowadzono na podstawie symulacji wyceny opcji wystawionych na EUR/PLN.

**Słowa kluczowe:** opcja kupna, opcja sprzedaży.

### **Wprowadzenie**

W grupie instrumentów pochodnych opcja jest szczególnym instrumentem zarządzania ryzykiem. Na atrakcyjność opcji wpływa niesymetryczność praw i obowiązków nałożonych na strony transakcji. Nabywcy opcji przysługuje prawo realizacji umowy, natomiast wystawca opcji, jeśli opcja będzie realizowana, jest zobowiązany do wykonania umowy [3, s. 194; 6, s. 77]. Zastosowanie opcji w transakcjach finansowych stwarza wiele możliwości kształtowania profili dochodów z inwestycji [1, s. 160]. W zarządzaniu ryzykiem i analizie kontraktów opcyjnych duże znaczenie ma rozpatrywanie wartości miar wrażliwości ceny opcji. Analiza kształtowania się tych miar znacznie ułatwia podjęcie trafnych decyzji związanych z zastosowaniem opcji w transakcjach finanso-

wych. Opcje o uwarunkowanej premii należą do klasy opcji egzotycznych, charakteryzujących się nieciągłością funkcji wypłaty [4, s. 78]. Czynniki, które istotnie wpływają na cenę opcji o uwarunkowanej premii, jest cena instrumentu bazowego oraz zmienność ceny instrumentu bazowego.

W artykule przedstawiono analizę kształtowania się wartości współczynników *delta*, *gamma* oraz *vega* opcji o uwarunkowanej premii. Porównano kształtowanie się ceny oraz wartości rozpatrywanych miar wrażliwości opcji zwykłych i opcji o uwarunkowanej premii. Ilustrację empiryczną przeprowadzono na podstawie symulacji wyceny opcji walutowych wystawionych na EUR/PLN.

## 1. Charakterystyka opcji uwarunkowanej premii

Nabywca opcji o uwarunkowanej premii płaci wystawcy premię w dniu wykonania opcji i tylko wtedy, gdy opcja wygasa *w-cenie* lub *po-cenie* [5, s. 25]. Jeśli opcja jest *nie-w-cenie*, to jej nabywca w ogóle nie płaci wystawcy premii<sup>1</sup>.

Funkcja wypłaty opcji kupna o uwarunkowanej premii wynosi:

$$w_c = \begin{cases} S - K - c, & \text{gdy } S \geq K \\ 0, & \text{gdy } S < K \end{cases} \quad (1)$$

gdzie:

- $w_c$  – wartość funkcji wypłaty opcji kupna o uwarunkowanej premii,
- $S$  – cena instrumentu bazowego,
- $K$  – cena wykonania opcji,
- $c$  – premia.

Cena opcji kupna o uwarunkowanej premii wyrażona jest wzorem [2, s. 44]:

$$c = Se^{(r-q)T} \frac{N(d_1)}{N(d_2)} - K \quad (2)$$

<sup>1</sup> Opcja kupna (sprzedaży) jest *w-cenie*, jeśli cena instrumentu bazowego jest większa (mniejsza) od ceny wykonania. Opcja kupna (sprzedaży) jest *po-cenie*, jeśli cena instrumentu bazowego jest równa cenie wykonania. Opcja kupna (sprzedaży) jest *nie-w-cenie*, jeśli cena instrumentu bazowego jest mniejsza (większa) od ceny wykonania.

gdzie:

$c$  – cena opcji kupna o uwarunkowanej premii,  
 $N(d)$  – dystrybuanta rozkładu normalnego zmiennej  $d$ ,

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S}{K}\right) + (r - q + 0,5\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}},$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T},$$

$r$  – stopa procentowa,

$q$  – stopa dywidendy,

$T$  – czas wygaśnięcia opcji,

$\sigma$  – zmienność ceny instrumentu bazowego,

pozostałe oznaczenia są takie same jak we wzorze (1).

Funkcja wypłaty opcji sprzedaży o uwarunkowanej premii przedstawiona jest wzorem:

$$w_p = \begin{cases} K - S - p, & \text{gd}y S \leq K \\ 0, & \text{gd}y S > K \end{cases} \quad (3)$$

$w_p$  – wartość wypłaty opcji sprzedaży o uwarunkowanej premii,

$p$  – premia,

pozostałe oznaczenia są takie same jak we wzorze (1).

Cena opcji sprzedaży o uwarunkowanej premii równa jest:

$$p = K - Se^{(r-q)T} \frac{N(d_1)}{N(d_2)} \quad (4)$$

gdzie:

$p$  – cena opcji sprzedaży o uwarunkowanej premii,

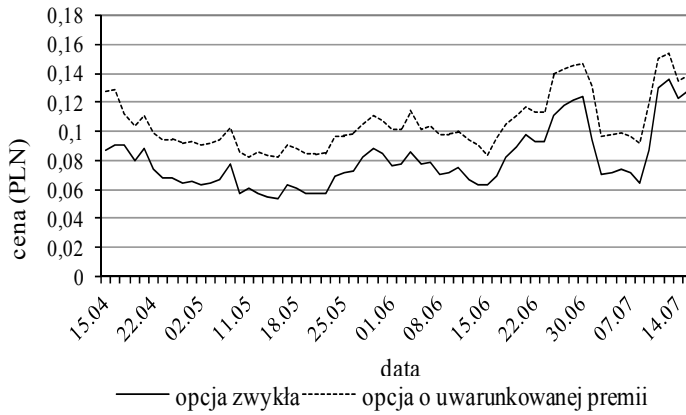
pozostałe oznaczenia jak we wzorze (3).

Przykład 1.

Rozważania dotyczą kształtowania się ceny opcji o uwarunkowanej premii. Na wykresie 1 przedstawiono kształtowanie się ceny zwykłej opcji kupna oraz opcji kupna o uwarunkowanej premii, a na wykresie 2 zilustrowano kształtowanie się ceny zwykłej opcji sprzedaży oraz opcji sprzedaży o uwarunkowanej premii. Termin wygaśnięcia analizowanych opcji wynosi 3 miesiące. Cena

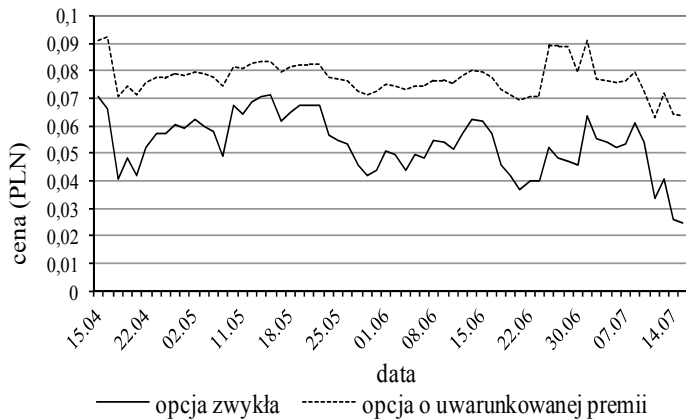
wykonania opcji wynosi 3,95 zł. Opcje wystawione są na EUR/PLN. Symulacja wyceny przeprowadzona jest dla okresu 15.04.2011–15.07.2011.

Wykres 1. Kształtowanie się ceny zwykłej opcji kupna i opcji kupna o uwarunkowanej premii



Źródło: opracowanie własne.

Wykres 2. Kształtowanie się ceny zwykłej opcji sprzedaży oraz opcji sprzedaży o uwarunkowanej premii



Źródło: opracowanie własne.

Analizowane opcje kupna były *w-cenie* w okresie 15.04.2011–22.04.2011, 9.05.2011, 26.05.2011–7.06.2011, 10.06.2011, 17.06.2011–1.07.2011, 6.07.2011, 11.07.2011–15.07.2011. Opcje sprzedaży były wówczas *nie-w-cenie*. W pozostałym analizowanym okresie opcje kupna były *nie-w-cenie*, a opcje sprzedaży *w-cenie*. Z kształtowania się cen przedstawionych na wykresach 1, 2 wynika, że:

- wzrost (spadek) ceny instrumentu bazowego wpływa na wzrost (spadek) ceny zwykłej opcji kupna oraz opcji kupna o uwarunkowanej premii;
- wzrost (spadek) ceny instrumentu bazowego wpływa na spadek (wzrost) ceny zwykłej opcji sprzedaży oraz opcji sprzedaży o uwarunkowanej premii;
- opcje o uwarunkowanej premii są droższe od opcji zwykłych;
- w porównaniu z opcją zwykłą cena opcji o uwarunkowanej premii ulega mniejszym wahanom.

## 2. Wrażliwość ceny opcji uwarunkowanych – analiza empiryczna

Miary wrażliwości ceny opcji określają wpływ zmiany wartości określonego czynnika na cenę opcji. Współczynnik *delta* określa, o ile zmieni się cena opcji, gdy cena instrumentu bazowego zmieni się o jednostkę. Współczynnik *delta* zwykłej opcji kupna ma wartości dodatnie z przedziału  $[0; 1]$ . Dodatnia wartość współczynnika *delta* oznacza, że wzrost (spadek) ceny instrumentu bazowego wpływa na wzrost (spadek) ceny opcji. W przypadku zwykłej opcji sprzedaży wartości współczynnika *delta* zawarte są w przedziale  $[-1; 0]$ . Ujemna wartość współczynnika *delta* wskazuje, że wzrost (spadek) ceny instrumentu bazowego wpływa na spadek (wzrost) ceny opcji. W tabeli 1 przedstawiono wartości współczynnika *delta* zwykłej opcji kupna i sprzedaży w zależności od typu opcji.

Tabela 1. Wartości współczynnika *delta* zwykłej opcji kupna i sprzedaży

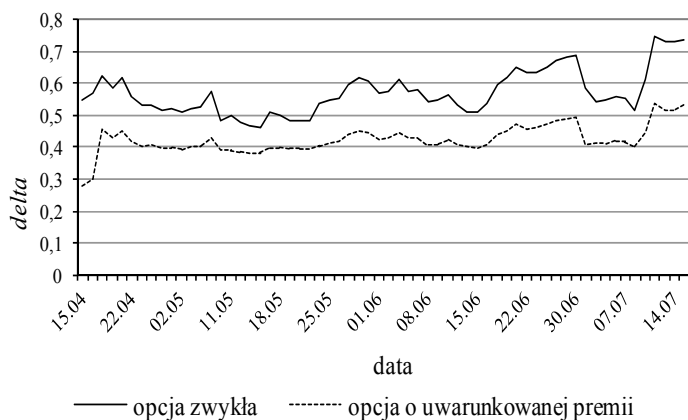
Rodzaj opcji	Typ opcji	Wartość współczynnika <i>delta</i>
Opcja kupna	<i>w-cenie</i>	$(0,5; 1,0]$
	<i>po-cenie</i>	0,5
	<i>nie-w-cenie</i>	$[0,0; 0,5)$
Opcja sprzedaży	<i>w-cenie</i>	$[-1; -0,5)$
	<i>po-cenie</i>	- 0,5
	<i>nie-w-cenie</i>	$(-0,5; 0,0]$

Źródło: opracowanie własne.

## Przykład 2.

Rozważania dotyczą kształtowania się wartości współczynnika *delta* opcji rozpatrywanych w przykładzie 1. Na wykresie 3 przedstawiono kształtowanie się współczynnika *delta* zwykłej opcji kupna i opcji kupna o uwarunkowanej premii. Na wykresie 4 zilustrowano wpływ ceny instrumentu bazowego na wartość współczynnika *delta* opcji kupna.

Wykres 3. Kształtowanie się wartości współczynnika *delta* zwykłej opcji kupna i opcji kupna o uwarunkowanej premii

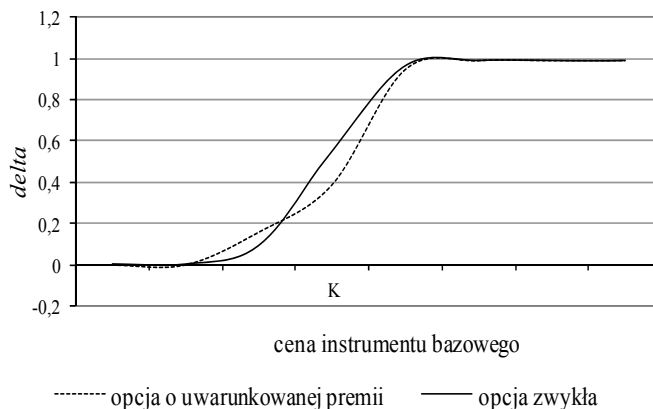


Źródło: opracowanie własne.

W rozpatrywanym okresie wartości współczynnika *delta* zwykłej opcji kupna są większe od wartości współczynnika *delta* opcji kupna o uwarunkowanej premii. W tym przypadku cena zwykłej opcji kupna jest bardziej wrażliwa na zmianę ceny instrumentu bazowego. Wzrost (spadek) ceny instrumentu bazowego wpływa na wzrost (spadek) wartości współczynnika *delta* zwykłej opcji kupna oraz opcji kupna o uwarunkowanej premii.

Podobnie jak w przypadku opcji zwykłej, wartości współczynnika *delta* opcji kupna o uwarunkowanej premii są zawarte w przedziale [0; 1]. Jeśli opcja jest *silnie-nie-w-cenie*, wartości współczynnika *delta* opcji kupna o uwarunkowanej premii są większe od wartości współczynnika *delta* opcji zwykłej. Wówczas cena opcji o uwarunkowanej premii jest bardziej wrażliwa na zmianę ceny instrumentu bazowego.

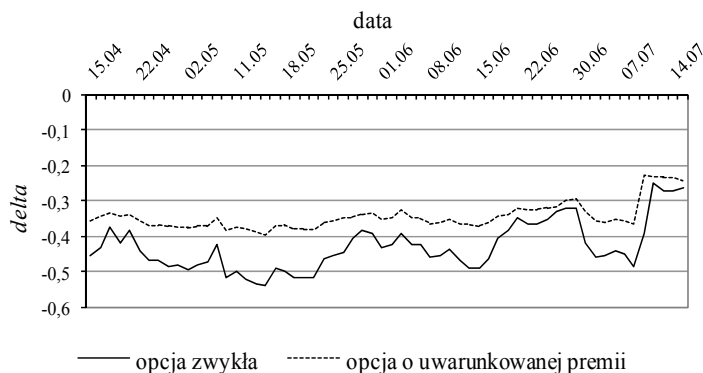
Wykres 4. Wpływ ceny instrumentu bazowego na kształtowanie się wartości współczynnika  $\delta$  zwykłej opcji kupna i opcji kupna o uwarunkowanej premii



Źródło: opracowanie własne.

Na wykresie 5 przedstawiono kształtowanie się współczynnika  $\delta$  zwykłej opcji sprzedaży i opcji sprzedaży o uwarunkowanej premii, a na wykresie 6 wpływ ceny instrumentu bazowego na wartość współczynnika  $\delta$  rozpatrywanych opcji.

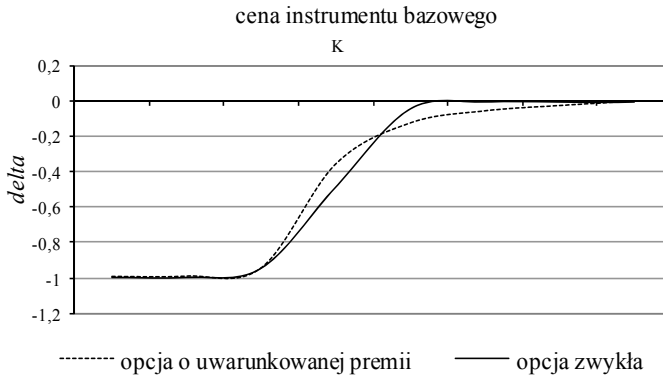
Wykres 5. Kształtowanie się wartości współczynnika  $\delta$  zwykłej opcji sprzedaży i opcji sprzedaży o uwarunkowanej premii



Źródło: opracowanie własne.

W rozpatrywanym okresie wartości współczynnika *delta* zwykłej opcji sprzedaży są mniejsze od wartości współczynnika *delta* opcji sprzedaży o uwarunkowanej premii. W tym przypadku cena zwykłej opcji sprzedaży charakteryzuje się większą wrażliwością na zmianę ceny instrumentu bazowego. Wzrost (spadek) ceny instrumentu bazowego wpływa na wzrost (spadek) wartości współczynnika *delta* zwykłej opcji sprzedaży oraz opcji sprzedaży o uwarunkowanej premii.

Wykres 6. Wpływ ceny instrumentu bazowego na kształtowanie się wartości współczynnika *delta* zwykłej opcji sprzedaży i opcji sprzedaży o uwarunkowanej premii



Źródło: opracowanie własne.

Wartości współczynnika *delta* opcji sprzedaży o uwarunkowanej premii zawierają się w przedziale  $[-1; 0]$ . W przypadku opcji *silnie-nie-w-cenie* wartości współczynnika *delta* opcji sprzedaży o uwarunkowanej premii są mniejsze od wartości współczynnika *delta* opcji zwykłej. Cena opcji o uwarunkowanej premii jest wówczas bardziej wrażliwa na zmianę ceny instrumentu bazowego.

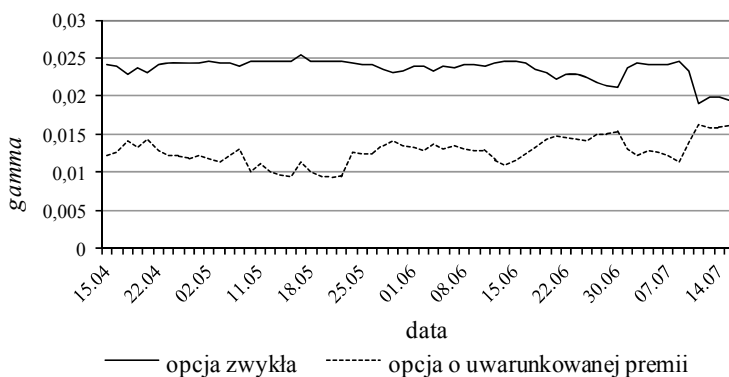
Współczynnik *gamma* określa względną zamianę współczynnika *delta* względem zmiany ceny instrumentu bazowego. Wartości współczynnika *gamma* zwykłej opcji kupna i zwykłej opcji sprzedaży są równe. Największą wartością współczynnika *gamma* charakteryzują się opcje typu *po-cenie*. Wartości współczynnika *gamma* opcji *silnie-w-cenie* oraz *silnie-nie-w-cenie* maleją do zera.



## Przykład 3.

Analiza dotyczy kształtowania się wartości współczynnika *gamma* opcji o uwarunkowanej premii. Na wykresie 7 przedstawiono kształtowanie się współczynnika *gamma* zwykłej opcji kupna i opcji kupna o uwarunkowanej premii, a na wykresie 8 wpływ ceny instrumentu bazowego na wartość współczynnika *gamma* opcji kupna.

Wykres 7. Kształtowanie się wartości współczynnika *gamma* zwykłej opcji kupna i opcji kupna o uwarunkowanej premii



Źródło: opracowanie własne.

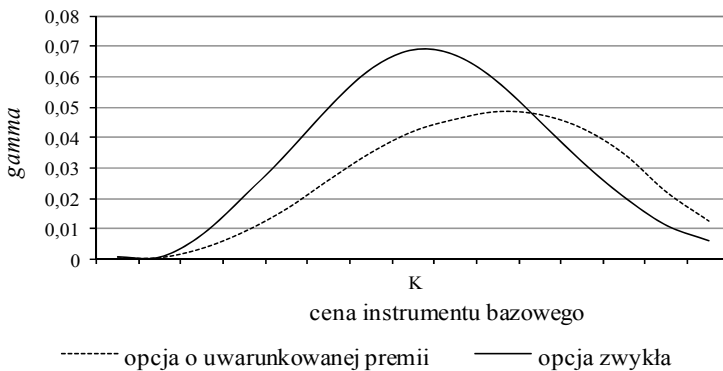
W rozpatrywanym okresie wartości współczynnika *gamma* analizowanej zwykłej opcji kupna są większe od wartości współczynnika *gamma* opcji kupna o uwarunkowanej premii. Jeśli opcje są *w-cenie* i cena instrumentu bazowego zbliża się do ceny wykonania, to występują różnice w reakcji współczynnika *gamma* analizowanych opcji na zmianę ceny instrumentu bazowego: wzrasta wartość współczynnika *gamma* zwykłej opcji kupna, natomiast maleje wartość współczynnika *gamma* opcji kupna o uwarunkowanej premii (tak było 30.06 – wykres 7).

Z analizy kształtowania się wartości współczynnika *gamma* opcji kupna o uwarunkowanej premii wynikają następujące własności:

- a) w przypadku opcji *silnie-w-cenie* wartości współczynnika *gamma* opcji o uwarunkowanej premii są większe od wartości współczynnika *gamma* zwykłej opcji;

- b) jeśli opcje są *po-cenie* i występuje wzrost ceny instrumentu bazowego, to istnieją różnice w reagowaniu współczynnika *gamma* analizowanych opcji na zmianę ceny instrumentu bazowego: występuje spadek wartości współczynnika *gamma* zwykłej opcji oraz wzrost wartości współczynnika *gamma* opcji o uwarunkowanej premii;
- c) jeśli opcje są *silnie-nie-w-cenie*, to wzrost (spadek) ceny instrumentu bazowego wpływa na wzrost (spadek) współczynnika *gamma* zarówno zwykłej opcji jak i opcji o uwarunkowanej premii;
- d) jeżeli opcje są *silnie-w-cenie*, to wzrost (spadek) ceny instrumentu bazowego wpływa na spadek (wzrost) współczynnika *gamma* opcji zwykłej i opcji o uwarunkowanej premii.

Wykres 8. Wpływ ceny instrumentu bazowego na kształtowanie się wartości współczynnika *gamma* zwykłej opcji kupna i opcji kupna o uwarunkowanej premii

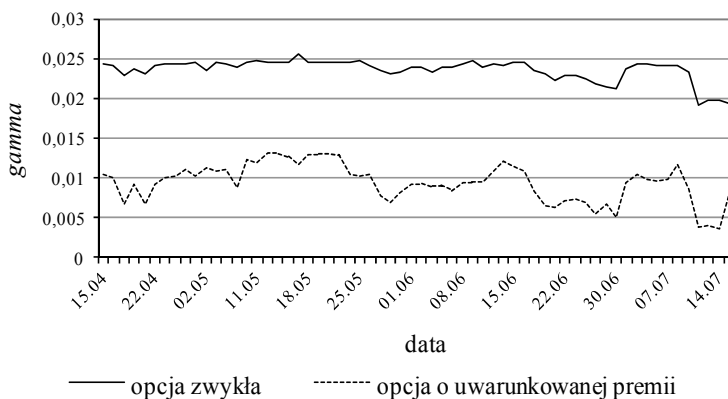


Źródło: opracowanie własne.

Na wykresie 9 przedstawiono kształtowanie się współczynnika *gamma* zwykłej opcji sprzedaży i opcji sprzedaży o uwarunkowanej premii, a na wykresie 10 wpływ ceny instrumentu bazowego na wartość współczynnika *gamma* opcji sprzedaży. W analizowanym okresie wartości współczynnika *gamma* zwykłej opcji sprzedaży są większe od wartości współczynnika *gamma* opcji sprzedaży o uwarunkowanej premii. Jeśli opcje są *w-cenie* i cena instrumentu bazowego zbliża się do ceny wykonania, to współczynniki *gamma* analizowanych opcji odmiennie reagują na zmianę ceny instrumentu bazowego: wartość

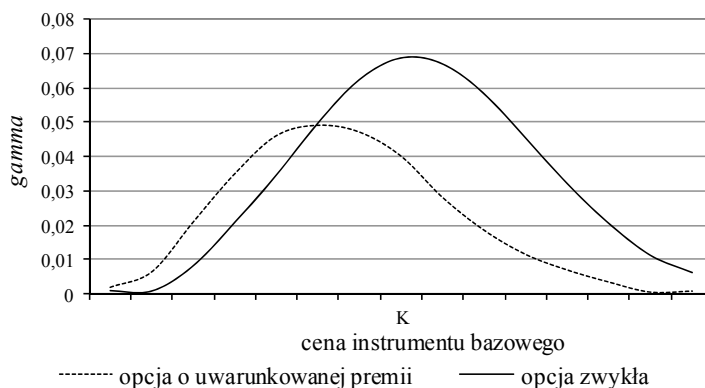
współczynnika *gamma* zwykłej opcji sprzedaży wzrasta, a wartość współczynnika *gamma* opcji o uwarunkowanej premii maleje (np. przypadek taki wystąpił 17.05 – wykres 9).

Wykres 9. Kształtowanie się wartości współczynnika *gamma* zwykłej opcji sprzedaży i opcji sprzedaży o uwarunkowanej premii



Źródło: opracowanie własne.

Wykres 10. Wpływ ceny instrumentu bazowego na kształtowanie się wartości współczynnika *gamma* zwykłej opcji sprzedaży i opcji sprzedaży o uwarunkowanej premii



Źródło: opracowanie własne.

Współczynnik *gamma* opcji sprzedaży o uwarunkowanej premii charakteryzuje się następującymi własnościami:

- a) w przypadku opcji *silnie-w-cenie* wartości współczynnika *gamma* opcji o uwarunkowanej premii są większe od wartości współczynnika *gamma* zwykłej opcji;
- b) różnice w reakcji wartości współczynnika *gamma* rozpatrywanych opcji na zmianę ceny instrumentu bazowego występują w przypadku, gdy opcje są typu *po-cenie* i zmniejsza się cena instrumentu bazowego; wówczas następuje spadek wartości współczynnika *gamma* zwykłej opcji oraz wzrost wartości współczynnika *gamma* opcji o uwarunkowanej premii;
- c) jeśli opcje są *silnie-w-cenie*, to spadek (wzrost) ceny instrumentu bazowego wpływa na spadek (wzrost) współczynnika *gamma* opcji zwykłej i opcji o uwarunkowanej premii;
- d) jeżeli opcje są *silnie-nie-w-cenie*, to wzrost (spadek) ceny instrumentu bazowego wpływa na spadek (wzrost) współczynnika *gamma* opcji zwykłej i opcji o uwarunkowanej premii.

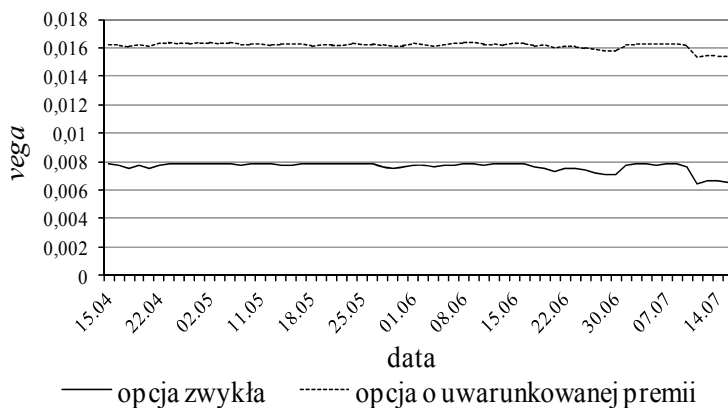
Współczynnik *vega* określa, o ile zmieni się cena opcji, gdy odchylenie standardowe wzrośnie o jednostkę. Wartości współczynnika *vega* zwykłych opcji kupna i sprzedaży są równe. Największa wartość współczynnika *vega* występuje w przypadku opcji *po-cenie*. Wartości opcji *silnie-w-cenie* oraz *silnie-nie-w-cenie* maleją do zera.

#### Przykład 4.

Rozważania dotyczą kształtowania się wartości współczynnika *vega* opcji analizowanych w przykładzie 1. Na wykresie 11 przedstawiono kształtowanie się wartości współczynnika *vega* zwykłej opcji kupna i opcji kupna o uwarunkowanej premii, a na wykresie 12 – kształtowanie się wartości współczynnika *vega* zwykłej opcji sprzedaży oraz opcji sprzedaży o uwarunkowanej premii.

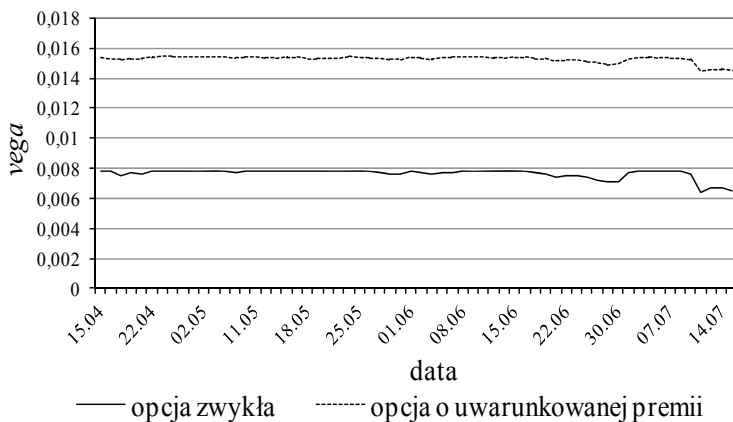
W rozpatrywanym przypadku wartości współczynnika *vega* zwykłej opcji kupna (sprzedaży) są mniejsze od wartości współczynnika *vega* opcji kupna (sprzedaży) o uwarunkowanej premii. Cena opcji o uwarunkowanej premii jest bardziej wrażliwa na wahania zmienności ceny instrumentu bazowego.

Wykres 11. Kształtowanie się wartości współczynnika *vega* zwykłej opcji kupna i opcji kupna o uwarunkowanej premii



Źródło: opracowanie własne.

Wykres 12. Kształtowanie się wartości współczynnika *vega* zwykłej opcji sprzedaży i opcji sprzedaży o uwarunkowanej premii

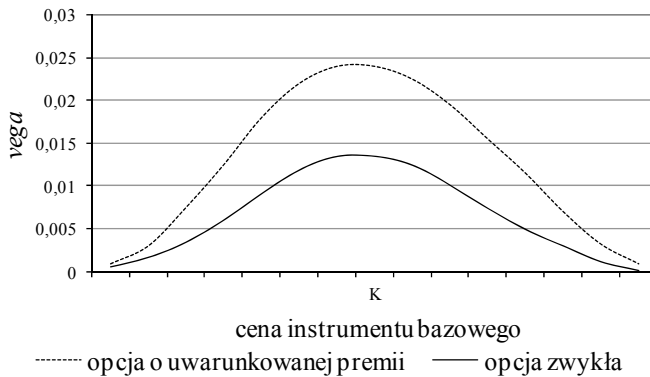


Źródło: opracowanie własne.

Podobnie jak w przypadku opcji zwykłych, opcje o uwarunkowanej premii typu *po-cenie* charakteryzują się największą wartością współczynnika *vega*. Wówczas cena tych opcji jest najbardziej wrażliwa na wahania zmienności ceny

instrumentu bazowego. Wartości współczynnika *vega* opcji *silnie-nie-w-cenie* oraz *silnie-w-cenie* maleją do zera.

Wykres 13. Wpływ ceny instrumentu bazowego na kształtowanie się wartości współczynnika *vega* zwykłej opcji kupna i opcji kupna o uwarunkowanej premii



Źródło: opracowanie własne.

## Podsumowanie

Cena instrumentu bazowego i jej zmienność mają duży wpływ na dochód otrzymany z opcji o uwarunkowanej premii. Gdy cena instrumentu bazowego oscyluje wokół ceny wykonania, znacznie się różnią wartości współczynników *delta*, *gamma* oraz *vega* opcji zwykłych i opcji o uwarunkowanej premii. Dodatni wynik finansowy z zakupu opcji o uwarunkowanej premii można osiągnąć tylko wtedy, gdy opcja w dniu wygaśnięcia będzie *silnie-w-cenie*. Nałożony warunek na rozliczenie opcji o uwarunkowanej premii powoduje, że są atrakcyjniejsze od opcji zwykłych w przypadku zabezpieczania inwestycji, na które ma wpływ wydarzenie, co do którego wystąpienia nie ma pewności. Opcje kupna (sprzedaży) o uwarunkowanej premii powinny być stosowane w transakcjach zabezpieczających tylko wtedy, jeśli w przyszłości oczekuje się znacznego wzrostu (spadku) ceny instrumentu bazowego. Z wystawienia opcji kupna (sprzedaży) o uwarunkowanej premii osiąga się zysk, jeśli w przyszłości wystą-

pi niewielki wzrost (spadek) ceny instrumentu bazowego w stosunku do ceny wykonania.

### Literatura

1. Dziawgo E., *Wprowadzenie do strategii opcyjnych*, Wydawnictwo Naukowe UMK, Toruń 2010.
2. Gastineau G., *An Introduction to Special-Purpose Derivatives*, „The Journal of Derivatives” 1994, nr 1.
3. Hull C.J., *Options, Futures and other Derivatives*, Prentice Hall International Inc., Upper Saddle River–New Jersey 2002.
4. Jajuga K., *Zarządzanie ryzykiem*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2007.
5. Napiórkowski A., *Charakterystyka, wycena i zastosowanie wybranych opcji egzotycznych*, Narodowy Bank Polski, Warszawa 2002.
6. Tarczyński W., Zwolankowski M., *Inżynieria finansowa*, Agencja Wydawnicza Placet, Warszawa 1999.

## ANALYSIS OF THE CONTINGENT PREMIUM OPTIONS PRICE SENSITIVITY

### Summary

The article presents the issues connected with contingent premium options: characteristic of instruments, the types of the options, the payoff function, the pricing model, the analysis the price of the option and the value of coefficients *delta*, *gamma* and *vega* for the standard and contingent premium options. The empirical illustration included in the article are concerned with the pricing simulations of the option on EUR/PLN.

**Keywords:** call option, put option.

*Translated by Ewa Dziawgo*

