STUDIA I PRACE
WYDZIAŁU NAUK EKONOMICZNYCH I ZARZĄDZANIA NR 2

HENRYK KOWGIER
Uniwersytet Szczeciński

O PEWNEJ WŁASNOŚCI ZBIORU MINIMALNEGO RYZYKA

Wprowadzenie

W artykule zbadano własność zbioru minimalnego ryzyka odkrytą w 1964 roku przez W. Sharpe'a. Mówi ona o tym, że dla danej populacji papierów wartościowych zachodzi zależność liniowa między współczynnikami β poszczególnych papierów wartościowych i ich oczekiwanymi stopami zwrotu wtedy i tylko wtedy, gdy współczynniki β są wyznaczone względem jakiegokolwiek portfela, który znajduje się w zbiorze minimalnego ryzyka[1].

Własność zbioru minimalnego ryzyka można prześledzić na przykładzie portfela Elektrimu, BRE, Uniwersalu, biorąc pod uwagę dwuletnie dane tygodniowe od stycznia 1994 roku do stycznia 1996 roku. Poza tym przedstawiono wykorzystanie metody programowania liniowego do wyznaczania portfeli o określonych wagach, współczynnikach beta i zoptymalizowanym współczynniku beta całego portfela.

1. Wyznaczenie zbioru minimalnego ryzyka

Po niezbędnych obliczeniach dokonanych metodą tak zwanych mnożników nieoznaczonych Lagrange'a otrzymano portfele efektywne umieszczone w tabeli 1. Symbole użyte w tabeli oznaczają odpowiednio:

$E(R_p)$ – oczekiwana stopa zwrotu portfela,

---

[1] Dowód zob. w [1].

σ^2_{MIN} (R_p)– minimalna wariancja portfela odpowiadająca oczekiwanej stopie zwrotu $E(R_p)$,

σ_{MIN} (R_p) – minimalne odchylenie standardowe portfela odpowiadające stopie zwrotu $E(R_p)$,

x_1, x_2, x_3 – wagi akcji odpowiednio Elektrimu, BRE i Uniwersalu w rozpatrywanym portfelu.

Tabela 1

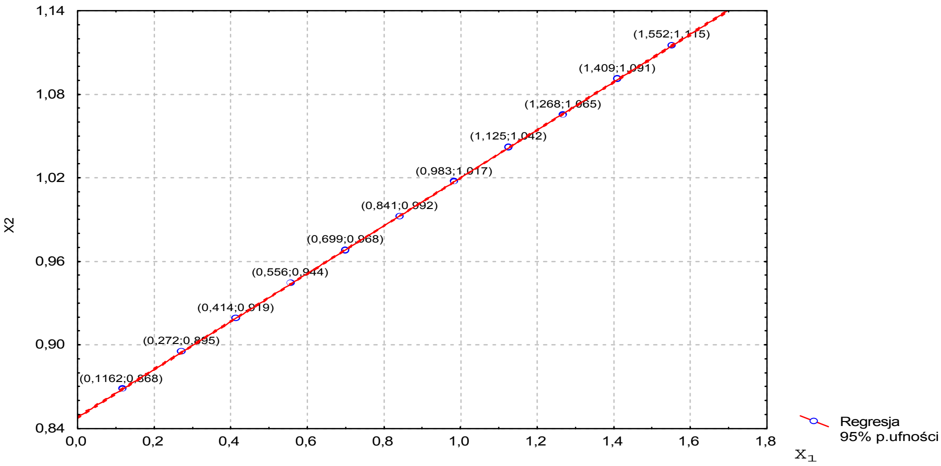
Przykładowe portfele efektywne dla spółek Elektim, BRE, Uniwersal

Lp.	k = $E(R_p)$	σ^2_{MIN} (R_p)	σ_{MIN} (R_p)	x_1	x_2	x_3
1.	0,0049	0,00645	0,080	0,1162	0,868	0,0158
2.	0,0055	0,00693	0,083	0,2720	0,895	–0,167
3.	0,0060	0,00820	0,091	0,4140	0,919	–0,333
4.	0,0065	0,01000	0,100	0,5560	0,944	–0,500
5.	0,0070	0,01300	0,114	0,6990	0,968	–0,667
6.	0,0075	0,01700	0,130	0,8410	0,992	–0,833
7.	0,0080	0,02200	0,148	0,9830	1,017	–1,000
8.	0,0085	0,02600	0,161	1,1250	1,042	–1,167
9.	0,0090	0,03300	0,182	1,2680	1,065	–1,333
10.	0,0095	0,03900	0,197	1,4090	1,091	–1,500
11.	0,0100	0,05700	0,239	1,5520	1,115	–1,667

Źródło: opracowanie własne.

Przedstawiając graficznie na wykresie punkty styczności izoelips wariancji i warstwic oczekiwanej stopy zwrotu (z tabeli 1) dla spółek Elektrim i BRE, uzyskano tak zwaną linię krytyczną[2] (wyznaczająca wagi poszczególnych akcji w portfelach należących do zbioru minimalnego ryzyka) – w tym wpadku jest to linia krytyczna dla portfeli efektywnych. Wyznaczone 11 punktów leży prawie idealnie na linii prostej co potwierdza również obliczony współczynnik korelacji między wagami, który jest w przybliżeniu równy 1, wynosi bowiem 0,99998. Oszacowana liniowa funkcja regresji liniowej między wagami ma natomiast postać: $x_2 = 0{,}17198x_1 + 0{,}84798$.

[2] Zob. *ibidem*.



Rys. 1. Fragment linii krytycznej dla spółek Elektrim i BRE

Źródło: opracowanie własne.

Zbiór minimalnego ryzyka dla portfeli Elektrim, BRE, Uniwersal ma (korzystając z danych w tabeli 1, estymacji metodą Hookea-Jeevesa i quasi-Newtona) następujące równanie hiperboli:

$$\frac{(\sigma - 0{,}039)^2}{0{,}041^2} - \frac{(R - 0{,}0051)^2}{0{,}0011^2} = 1 .$$

Na rysunku 2 przedstawiono zbiór minimalnego ryzyka wraz z dwoma stycznymi do tego zbioru odpowiadającymi odchyleniu standardowemu 0,09, przy czym jedną styczną poprowadzono do zbioru efektywnego, drugą zaś do dolnej części zbioru minimalnego ryzyka:

$$Rg(\sigma) := 0.0051 + \frac{0.0011\sqrt{(\sigma - 0.039)^2 - 0.041^2}}{0.041},$$

$$Rd(\sigma) := 0.0051 - \frac{0.0011\sqrt{(\sigma - 0.039)^2 - 0.041^2}}{0.041},$$

$$Rs1(\sigma) := -0{,}045(\sigma - 0{,}09) + 4{,}286 \cdot 10^{-3},$$

$$Rs2(\sigma) := 0{,}045(\sigma - 0{,}09) + 5{,}914 \cdot 10^{-3},$$

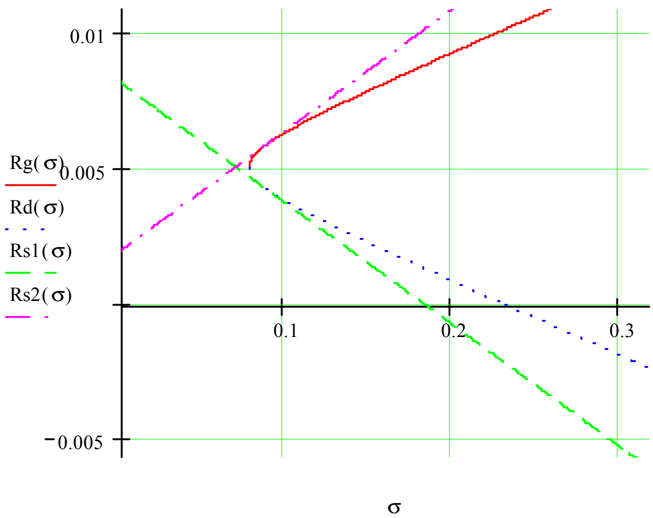
gdzie:

$Rg(\sigma)$ – zbiór portfeli efektywnych (górna część zbioru minimalnego ryzyka),

$Rd(\sigma)$ – dolna część zbioru minimalnego ryzyka,

$Rs1(\sigma)$ – równanie stycznej do dolnej części zbioru minimalnego ryzyka,

$Rs2(\sigma)$ – równanie stycznej do zbioru portfeli efektywnych.



Rys. 2. Zbiór minimalnego ryzyka dla portfeli Elektrim, BRE, Uniwersal wraz z dwoma stycznymi do tego zbioru odpowiadającymi odchyleniu standardowemu 0,09

Źródło: opracowanie własne.

2. Zależność między średnimi stopami zwrotu a współczynnikami β na wybranym przykładzie

Współczynnik β danego papieru wartościowego na ogół informuje o tym, o ile zmieni się stopa zwrotu tego papieru, gdy stopa zwrotu portfela rynkowego (zawierającego wszystkie walory obarczone ryzykiem) zmieni się o 1%. W interpretacji geometrycznej β jest współczynnikiem kierunkowym tak zwanej linii charakterystycznej, opisującej zależność między stopą zwrotu danej akcji a stopą zwrotu portfela rynkowego (np. indeksu giełdowego). W praktyce współczynnik β danej akcji A jest obliczamy zgodnie ze wzorem:

$$\beta_A = \frac{\sigma(R_A)}{\sigma(R_P)} \cdot r_{AP} \tag{1}$$

gdzie:

$\sigma(R_A)$ – odchylenie standardowe akcji A,
$\sigma(R_p)$ – odchylenie standardowe portfela,
r_{AP} – współczynnik korelacji między akcją A oraz portfelem rynkowym.

W tabeli 2 podano wartości współczynników beta i współczynników korelacji danych spółek z portfelami rynkowymi mającymi odchylenia standardowe odpowiednio 0,084; 0,090; 0,099, przy czym obliczenia wykonano dla średniej stopy zwrotu: dla Elektrimu wynoszącej 0,005, dla BRE – 0,005, dla Uniwersalu – 0,002. Wytłuszczoną czcionką oznaczono wartości liczbowe odpowiadające portfelom ze zbioru efektywnego.

Tabela 2

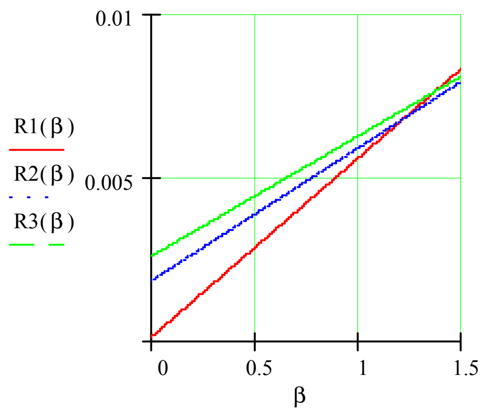
Oszacowane współczynniki beta

σ_p	β_{E1}	β_{B1}	β_{U1}	r_{EP1}	r_{BP1}	r_{UP1}	β_{E2}	β_{B2}	β_{U2}	r_{EP2}	r_{BP2}	r_{UP2}
0,084	**0,89**	**0,89**	**0,34**	**0,72**	**0,92**	**0,19**	0,92	0,92	1,48	0,74	0,96	0,81
0,090	**0,77**	**0,77**	**0,033**	**0,67**	**0,86**	**0,02**	0,82	0,82	1,56	0,71	0,91	0,92
0,099	**0,65**	**0,65**	**–0,17**	**0,62**	**0,79**	**–0,11**	0,7	0,7	1,53	0,67	0,86	0,98

Źródło: obliczenia własne.

Przy jej budowie tabeli wykorzystano również oczywisty fakt, że $\beta_p = 1$ (dla portfela rynkowego ze zbioru minimalnego ryzyka). Należy dodać, że współczynniki $\beta_{E1} = 0,89$, $\beta_{B1} = 0,89$, $\beta_{U1} = 0,34$, są odciętymi punktów (0,890; 0,005), (0,890; 0,005), (0,340; 0,002) leżących na prostej $R1(\beta) = 0,0054\ \beta + 0,000198$ (odpowiada $\sigma_p = 0,084$ – portfel efektywny), współczynniki $\beta_{E1} = 0,770$; $\beta_{B1} = 0,770$; $\beta_{U1} = 0,033$ są odciętymi punktów (0,770; 0,005), (0,770; 0,005), (0,033; 0,002) leżących na prostej: $R2(\beta) = 0,00405\ \beta + 0,001864$ (odpowiada $\sigma_p = 0,09$ – portfel efektywny), a współczynniki $\beta_{E1} = 0,89$; $\beta_{B1} = 0,89$;

β_{U1} = 0,34 są odciętymi punktów leżących na prostej $R3(\beta)$ = 0,0037 β + 0,002612 (odpowiada σ_p = 0,099 – portfel efektywny) – zob. rysunek 3.



$R1(\beta)$ – prosta pierwsza od dołu,
$R2(\beta)$ – prosta w środku,
$R3(\beta)$ – prosta pierwsza od góry.

Rys. 3. Zależność między średnią stopą zwrotu a współczynnikami β dla spółek Elektrim, BRE, Uniwersal w przypadku portfeli rynkowych ze zbioru efektywnego o odchyleniach standardowych 0,084; 0,090; 0,099

Źródło: opracowanie własne.

Zauważmy, że portfele o wartości oczekiwanej 0,000198 (co odpowiada β = 0) nie są skorelowane z portfelem rynkowym odpowiadającym σ_p = 0,084. Analogicznie portfele o wartościach oczekiwanych 0,001864 i 0,002612 nie są skorelowane z portfelami rynkowymi o odchyleniach standardowych odpowiednio 0,090 i 0,099. Fakt ten w prosty sposób wynika ze wzoru na współczynnik β.

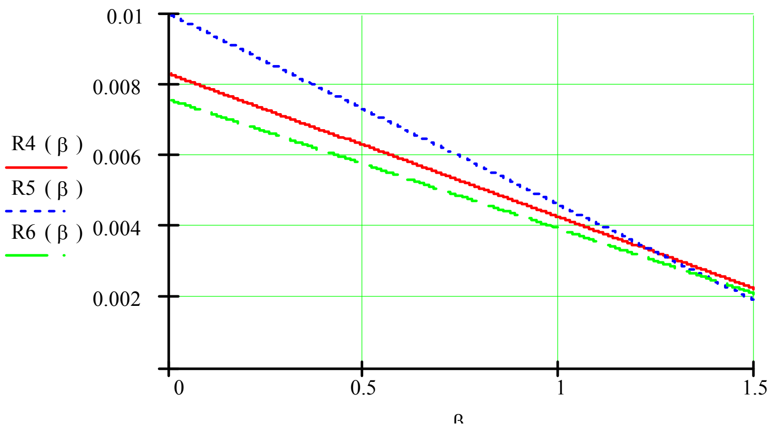
Rozumując podobnie, dla dolnej części zbioru minimalnego ryzyka otrzymano następujące proste:

$$R5(\beta) = -0{,}0054\ \beta + 0{,}01 \text{ (odpowiada przypadkowi } \sigma_p = 0{,}084),$$

$$R4(\beta) = -0{,}00405\ \beta + 0{,}00831 \text{ (odpowiada przypadkowi } \sigma_p = 0{,}009),$$

$$R6(\beta) = -0{,}0037\ \beta + 0{,}0076 \text{ (odpowiada przypadkowi } \sigma_p = 0{,}099),$$

dla których współczynniki β_{E2}, β_{B2}, β_{U2} są odciętymi punktów leżących na tych prostych – zob. rysunek 4.



R6(β) – prosta pierwsza od dołu,
R4(β) – prosta w środku,
R5(β) – prosta pierwsza od góry.

Rys. 4. Zależność między średnią stopą zwrotu a współczynnikami β dla spółek Elektrim, BRE, Uniwersal w przypadku portfeli rynkowych z dolnej części zbioru minimalnego ryzyka o odchyleniach standardowych 0,084; 0,090; 0,099

Źródło: opracowanie własne.

Zauważmy, że wszystkie portfele o wartościach oczekiwanych 0,01000; 0,00831; 0,00760 nie są skorelowane z portfelami rynkowymi z dolnej części zbioru minimalnego ryzyka mającymi odchylenie standardowe odpowiednio 0,084; 0,09; 0,099. Z analizy rysunku 2 wynika, że rozpatrując portfele rynkowe ze zbioru efektywnego i zbliżając się coraz bardziej do portfela globalnego minimalnego ryzyka $(E(R_p); \sigma_{MIN}(R_p)) = (0{,}0049; 0{,}08)$ (jest to portfel o najmniejszym globalnym ryzyku, o którym można powiedzieć, że stosując analizę portfelową do samych akcji nie da się już bardziej obniżyć ryzyka), otrzymamy, że portfele nieskorelowane z tymi portfelami będą miały coraz mniejszą stopę zwrotu. Rozpatrując natomiast portfele rynkowe i zbliżając się do portfela globalnego minimalnego ryzyka, wzdłuż dolnej części zbioru minimalnego ryzyka, otrzymamy, że portfele nieskorelowane z tymi portfelami będą miały coraz wyższą stopę zwrotu. Na uwagę zasługuje też fakt, że współczynniki beta (zob. tabelę 2) dla Uniwersalu – najmniejsze w każdym wypadku dla portfeli efektywnych – stają się największe dla portfeli z dolnej części zbioru minimalnego ryzyka. Podobnie bardzo duży wzrost współczynników korelacji z portfelami rynkowymi odnotowano dla Uniwersalu w dolnej części zbioru minimalnego ryzyka, czego należało się spodziewać na skutek wzrostu współczynników beta dla tej spółki. Elektrim i BRE nie charakteryzowały się tak drastycznymi różnicami współczynników beta i współczynników korelacji.

3. Wykorzystanie metody programowania liniowego do modelowania wartości wag portfela przy optymalnym współczynniku β portfela rynkowego

Można wykazać[3], że współczynnik beta portfela rynkowego zawierającego *N* walorów jest średnią ważoną współczynników beta poszczególnych walorów, czyli:

$$\beta_p = \sum_{i=1}^{N} x_i \beta_i \qquad (2)$$

gdzie:

β_i – współczynniki beta poszczególnych walorów ($1 \le i \le N$),
x_i – wagi poszczególnych walorów w portfelu P ($1 \le i \le N$).

Wracając do portfeli Elektrim, BRE, Uniwersal, spróbujmy sprawdzić, jakie zależności obowiązują dla wag tego portfela, jeżeli na przykład zależy nam na tym, aby był to portfel rynkowy, efektywny, o odchyleniu standardowym 0,084. Na podstawie danych z tabeli 2 i wzoru (2) mamy:

$$1 = 0,89x_1 + 0,89x_2 + 0,34x_3.$$

Korzystając z tego, że $\sum_{i=1}^{3} x_i = 1$ i przekształcając powyższą równość, otrzymujemy:

$$x_2 = -x_1 + 1,2, \quad x_3 = 1 - x_1 - x_2 = -0,2.$$

[3] Zob. [3].

Zatem wagi tego portfela mają postać ogólnie: $(x_1,\ -x_1+1{,}2,\ -0{,}2)$, gdzie: x_1 – waga Elektrimu, x_2 – waga BRE, x_3 – waga Uniwersalu.

Trójkę szukanych wag po niezbędnych rachunkach można przedstawić następująco:

$$\left(x_1,\quad \frac{-x_1(\beta_1-\beta_3)+(1-\beta_3)}{\beta_2-\beta_3},\quad \frac{x_1(\beta_1-\beta_2)+(\beta_2-1)}{\beta_2-\beta_3}\right) \tag{3}$$

Przykładowy portfel ma na przykład wagi $x_1=0{,}3, x_2=0{,}9, x_3=-0{,}2$. Oczywiście, podobnych portfeli można znaleźć nieskończenie wiele. Widać, że ten portfel efektywny w każdym przypadku wymaga krótkiej sprzedaży akcji Uniwersalu. Biorąc pod uwagę z tabeli inne portfele efektywne o odchyleniu standardowym 0,090; 0,099 i korzystając z zależności (3), otrzymujemy trójki wag postaci odpowiednio: $(x_1,\ -x_1+1{,}31,\ -0{,}31)$, $(x_1,\ -x_1+1{,}42,\ -0{,}42)$. W tych wypadkach również jest wymagana krótka sprzedaż akcji Uniwersalu i to tym większa, im zwiększamy odchylenie standardowe. Może się jednak zdarzyć, że zależy nam na tym, aby wagi wszystkich spółek przyjmowały jedynie wartości dodatnie przy takich samych jak poprzednio wartościach współczynników beta i dodatkowo zoptymalizowanej wartości współczynnika beta dla portfela rynkowego. Problem ten można rozwiązać stosując na przykład metodę programowania liniowego. Wykorzystując do tego celu program Mathematica 4.0 Profesional, otrzymujemy:

$\text{ConstrainedMax}[0{,}89\cdot \text{x}_1+0{,}89\cdot x_2+0{,}34\cdot x_3,$
$\{x_1\geq 0{,}1,\ x_2\geq 0{,}1,\ x_3\geq 0{,}1,\ x_1+x_2+x_3\leq 1\},$
$\{x_1,\ x_2,\ x_3\}],$

$\text{ConstrainedM}\,0{,}77\cdot x_1+0{,}77\cdot x_2+0{,}033\cdot x_3,$
$\{x_1\geq 0{,}1,\ x_2\geq 0{,}1,\ x_3\geq 0{,}1,\ x_1+x_2+x_3\leq 1\},\ \{x_1,\ x_2,\ x_3\}],$
$\{0{,}6963,\ \{x_1\to 0{,}8,\ x_2\to 0{,}1,\ x_3\to 0{,}1\}\}.$

W pierwszym przypadku uzyskaliśmy maksymalną wartość współczynnika beta dla portfela rynkowego $\beta_{p\max}=0{,}835$ oraz wagi Elektrimu, BRE i Uniwersalu odpowiednio 0,8; 0,1; 0,1. Podobnie rzecz wygląda w drugim przypadku, przy czym $\beta_{p\max}=0{,}6963$.

Zmieniając nieco warunki mamy:

$\text{ConstrainedMax}[0{,}89\cdot \mathrm{x}_1+0{,}89\cdot x_2+0{,}34\cdot x_3,$

$\{x_1\geq 0{,}01,\ x_2\geq 0{,}01,\ x_3\geq 0{,}01,\ x_1+x_2+x_3\leq 1\},$

$\{x_1,\ x_2,\ x_3\}],$

$\{0{,}8845,\ \{\mathrm{x}_1\to 0{,}98,\ x_2\to 0{,}01,\ x_3\to 0{,}01\}\},$

$\text{ConstrainedMax}[0{,}77\cdot \mathrm{x}_1+0{,}77\cdot x_2+0{,}033\cdot x_3,$

$\{x_1\geq 0{,}01,\ x_2\geq 0{,}01,\ x_3\geq 0{,}01,\ x_1+x_2+x_3\leq 1\},$

$\{x_1,\ x_2,\ x_3\}],$

$\{0{,}76263,\ \{x_1\to 0{,}98,\ x_2\to 0{,}01,\ x_3\to 0.01\}\}.$

Zmieniając warunki ograniczające i przyjmując $x_i\geq 10^{-n}$ dla $1\leq i\leq 3$ oraz $n\geq 3$, można sprawdzić, że optymalny współczynnik β_p coraz bardziej dąży do największego β występującego w zapisie optymalizowanej funkcji liniowej, waga Elektrimu – do 1 a pozostałe wagi do zera.
Przyjmując te same warunki ograniczające w przypadku współczynników beta 0,82, 0,82, 1,56, lub 0,92, 0,92, 1,48 lub 0,70, 0,70, 1,53 dzieje się podobnie, czyli optymalne bety dla portfeli dążą odpowiednio do 1,56, 1,48, 1,53 z tym że z wagami spółek dzieje się odwrotnie niż poprzednio, gdyż dla odmiany wagi Elektrimu i BRE dążą do zera, a Uniwersalu do jedynki. Widać z tego, że można nieco sterować warunkami ograniczającymi, uzyskując nieco wyższą wartość współczynnika beta dla portfela.

Trochę inaczej jest z wagami spółek przy rozpatrywaniu portfela z dolnej części zbioru minimalnego ryzyka, który ma odchylenie standardowe na przykład równe 0,09. Postępując analogicznie, otrzymujemy:

$$1=0{,}82x_1+0{,}82x_2+1{,}56x_3,$$

przy czym trójki wag mają postać: $(x_1,\ -x_1+0{,}76,\ 0{,}24)$. Możliwe jest tutaj utworzenie nieskończenie wielu portfeli o wszystkich wagach dodatnich, a konkretnie dla $x_1,\ x_2\in(0,\ 0{,}76),\ x_3=0{,}24$. Gdy odchylenie standardowe jest równe 0,084 i 0,099, otrzymujemy trójki wag: $(x_1, -x_1 + 0{,}86, 0{,}14)$ i $(x_1, -x_1 + 0{,}64, 0{,}36)$. Tu również możliwe jest utworzenie nieskończenie wielu portfeli o wszystkich wagach dodatnich przy stałej wartości wagi Uniwersalu na poziomie 0,14 lub 0,36, przy czym udział wagi Uniwersalu w portfelu rośnie wraz ze wzrostem odchylenia standardowego – odwrotnie niż dla zbioru efektywnego. Jak widać z rozważań dotyczących portfeli Elektrim, BRE, Uniwersal, w dolnej części zbioru minimalnego ryzyka można już wygenerować nieskończenie wiele portfeli o wszystkich wagach dodatnich, co spowoduje, że nie trzeba prowadzić krótkiej sprzedaży. Inwestor jednak osiąga w tym przypadku relatywnie mniejszą stopę zwrotu niż dla portfeli efektywnych.

Wnioski

W artykule pokazano, jak działa własność Sharpe'a w odniesieniu do wybranego portfela. Wykorzystanie metody programowania liniowego (zawartego w programie Mathematica 4.0 Profesional) pozwala znajdować na przykład portfele charakteryzujące się dodatnimi wagami przy z góry określonych współczynnikach β poszczególnych walorów i maksymalizowanym współczynniku beta samego portfela.

Literatura

1. Haugen R.: *Teoria nowoczesnego inwestowania*. WIG Press, Warszawa 1996.
2. Kowgier H.: *O sposobie szacowania przybliżonych wartości punktów optymalnych na krzywej portfeli efektywnych z zastosowaniem pewnej znanej funkcji użyteczności*. „Przegląd Statystyczny" 2003, z. 3.
3. Tarczyński W.: *Rynki kapitałowe*. Placet, Warszawa 1997.

ON A CERTEIN PROPERTY OF SET OF MINIMUM RISK

Summary

In the article author presented method working of Sharpe property on select portfolio. Besides use Mathematica 4 Programme he shew how to find with positive weights portfolios beside given coefficients beta of values and maximum coefficient the beta of portfolio.

Translated by Henryk Kowgier