

Beata Stolorz

DUAL DELTA I DUAL GAMMA – WSPÓŁCZYNNIKI WRAŻLIWOŚCI

Wstęp

Wśród wielu narzędzi służących do oceny ryzyka inwestycji w opcje na szczególną uwagę zasługują miary wrażliwości. Na cenę bądź stopę zwrotu instrumentu finansowego wpływa wiele zmiennych. Nazywa się je czynnikami ryzyka. Wysoka wrażliwość tych zmiennych świadczy o wysokim ryzyku rynkowym instrumentu finansowego. W praktyce najczęściej stosowane są tak zwane współczynniki greckie (*Greeks*): *delta*, *gamma*, *theta*, *vega* i *rho*¹. Celem artykułu jest zaprezentowanie dwóch mniej znanych współczynników: *dual delta* i *dual gamma* europejskiej opcji kupna (*call*) i sprzedaży (*put*) dla modelu wyceny Blacka-Scholesa.

1. Miary wrażliwości

W ujęciu matematycznym miara wrażliwości to pochodna cząstkowa funkcji wyrażającej cenę opcji względem wybranego czynnika ryzyka². Do najbardziej znanych i wykorzystywanych w praktyce należą współczynniki: *delta*, *gamma*, *vega*, *theta* i *rho*, Zalicza się je do klasy modeli deterministycznych. W podanej metodologii występuje element stochastyczny, jednak w postaci końcowej modele te mają postać niezależną od składnika losowego. Parametr zmienności określony jest jako odchylenie standardowe stóp zwrotu i traktuje się go jako znany. Greckie współ-

¹ Więcej na ten temat zob. [2], s. 359–394.

² Zob. [5], s. 125.

czynniki wyrażają wpływ na cenę opcji podstawowych czynników ryzyka, takich jak cena instrumentu bazowego, czas do wygaśnięcia opcji, poziom zmienności instrumentu bazowego, stopa procentowa wolna od ryzyka (krajowa lub zagraniczna³). Współczynniki te wykorzystuje się do tworzenia strategii minimalizujących ryzyko rynkowe. Wysoka wrażliwość ceny lub stopy zwrotu instrumentu finansowego na działanie wpływających na nie czynników świadczy o wysokim ryzyku rynkowym instrumentu finansowego.

Oprócz tradycyjnych współczynników greckich specjaliści analizujący opcje określają czasem jeszcze inne współczynniki wrażliwości, takie jak *volga*, *vanna*⁴, *speed*, *charm* i *colour*⁵. Jednym z czynników ryzyka jest cena wykonania opcji. W analizach finansowych stosowane są dwa współczynniki wrażliwości oparte na tym czynniku. Są to *dual delta* i *dual gamma*:

- a) współczynnik *dual delta* określa, o ile zmieni się cena opcji względem zmiany ceny wykonania opcji; jest to pierwsza pochodna cząstkowa ceny opcji względem ceny wykonania opcji;
- b) współczynnik *dual gamma* określa, o ile zmieni się współczynnik *dual delta*, gdy zmieni się cena wykonania opcji; jest to druga pochodna cząstkowa ceny opcji liczona względem ceny wykonania opcji.

Wybrane współczynniki wrażliwości wraz z wzorami je opisującymi przedstawiono w tabeli 1.

³ Szerzej na ten temat w [6].

⁴ Zob. [3] s. 350, [4].

⁵ Szerzej na ten temat zob. [7], s. 172–179.

Tabela 1. Wybrane współczynniki wrażliwości

Greeks	Call	Put
Delta	$\frac{\partial c}{\partial S}$	$\frac{\partial p}{\partial S}$
Gamma	$\frac{\partial^2 c}{\partial S^2}$	$\frac{\partial^2 p}{\partial S^2}$
Theta	$\frac{\partial c}{\partial t} = -\frac{\partial c}{\partial \tau}$	$\frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial \tau}$
Dual delta	$\frac{\partial c}{\partial X}$	$\frac{\partial p}{\partial X}$
Dual gamma	$\frac{\partial^2 c}{\partial X^2}$	$\frac{\partial^2 p}{\partial X^2}$

Źródło: opracowanie własne.

2. Dual delta i dual gamma w modelu wyceny Blacka-Scholesa

Do wyceny opcji można zastosować różne modele, zatem różne będą również wzory opisujące współczynniki wrażliwości. Najczęściej stosowane są równania modelu Blacka-Scholesa⁶:

$$\begin{aligned}
 c &= S \cdot N(d_1) - X \cdot e^{-r \cdot (T-t)} \cdot N(d_2) \\
 p &= X \cdot e^{-r \cdot (T-t)} \cdot N(-d_2) - S \cdot N(-d_1) \\
 d_1 &= \frac{\ln\left(\frac{S}{X}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right) \cdot (T-t)}{\sigma \cdot \sqrt{T-t}} \\
 d_2 &= \frac{\ln\left(\frac{S}{X}\right) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) \cdot (T-t)}{\sigma \cdot \sqrt{T-t}} = d_1 - \sigma \cdot \sqrt{T-t}
 \end{aligned} \tag{1}$$

⁶ Zob. [8], s. 48.

gdzie:

- c – wartość europejskiej opcji kupna,
- p – wartość europejskiej opcji sprzedaży,
- S – bieżąca cena akcji,
- X – cena wykonania opcji,
- r – stopa procentowa wolna od ryzyka,
- T – termin wygaśnięcia,
- t – termin bieżący,
- σ – odchylenie standardowe stopy zwrotu akcji,

$N(x)$ we wzorach (1) jest to wartość dystrybuanty standaryzowanego rozkładu normalnego dla argumentu x , określona następująco:

$$N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{1}{2}y^2} dy.$$

Czas do wygaśnięcia opcji τ można wyrazić za pomocą następującego wzoru:

$$\tau = T - t \quad (2)$$

Korzystając ze wzorów (1) i (2), można wyprowadzić wzory na współczynniki wrażliwości europejskiej opcji kupna i sprzedaży (tabela 2).

Wzory służące do obliczenia współczynników *dual delta* dla opcji *call* i *put* różnią się od siebie. W przypadku *dual gamma* są takie same (tabela 2), gdyż wartość tego parametru nie zależy od pozycji przyjętej przez inwestora.

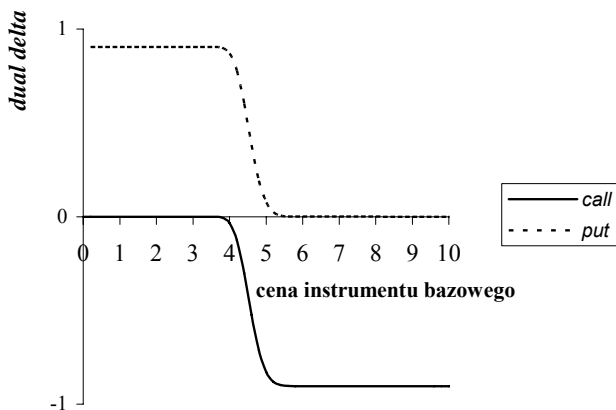
Na rysunkach 1–4 przedstawiono wykresy funkcji opisujących wartości współczynników *dual delta* i *dual gamma* dla opcji europejskiej w zależności od ceny instrumentu bazowego S i czasu pozostającego do wygaśnięcia opcji τ . Widać na nich, że nawet niewielka zmiana ceny instrumentu bazowego może powodować bardzo gwałtowne zmiany wartości badanych współczynników, które z kolei wpływają na kształtowanie się wartości tradycyjnych współczynników „greckich”. Nie bez znaczenia jest również zmiana czasu do wygaśnięcia. Można zauważyć, że zależność wskaźników *dual delta* i *dual gamma* od ceny S jest regularna, natomiast ich zmiany w zależności od czasu τ są silnie uzależnione od relacji ceny wykonania opcji do bieżącej ceny instrumentu bazowego. Świadczy to o konieczności kontrolowania wartości tych wskaźników przy gwałtownych zmianach cen instrumentu bazowego.

Tabela 2. Wybrane współczynniki wrażliwości dla modelu wyceny opcji Blacka-Scholesa

Greeks	Model wyceny opcji Blacka-Scholesa	
	Call	Put
Delta	$N(d_1)$	$N(d_1)-1$
Gamma	$\frac{N'(d_1)}{S\sigma\sqrt{T-t}}$	
Theta	$-\frac{SN'(d_1)\sigma}{2\sqrt{T-t}} - rXe^{-r(T-t)}N(d_2)$	$-\frac{SN'(d_1)\sigma}{2\sqrt{T-t}} + rXe^{-r(T-t)}N(d_2)$
Dual delta	$-e^{-r(T-t)}N(d_2)$	$-e^{-r(T-t)}N(-d_2)$
Dual gamma	$\frac{e^{-r(T-t)}N'(d_2)}{X\sigma\sqrt{T-t}}$	

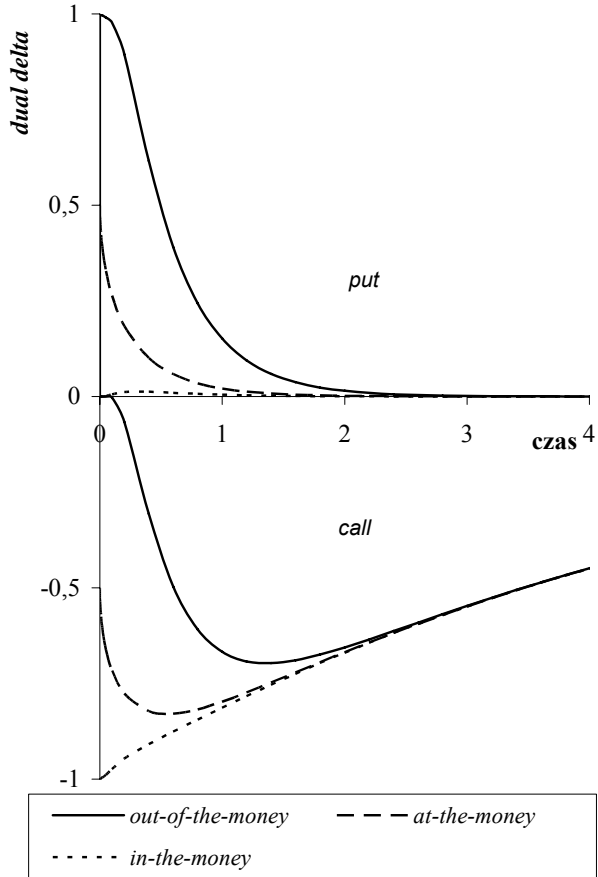
Źródło: opracowanie własne.

Rys. 1. Zależności współczynnika dual delta od ceny S dla opcji call i put



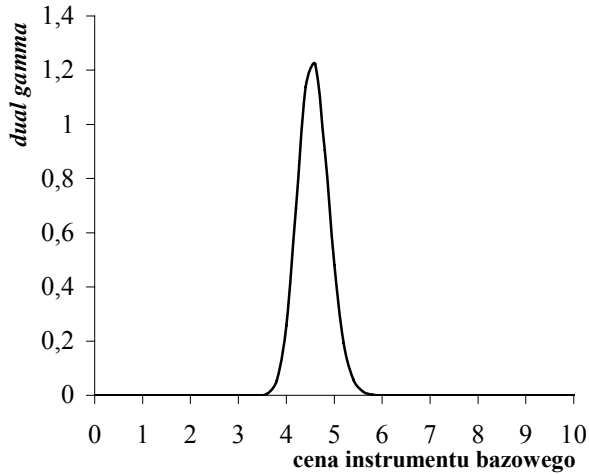
Źródło: opracowanie własne.

Rys. 2. Zależności współczynnika *dual delta* od czasu τ dla opcji *call* i *put*



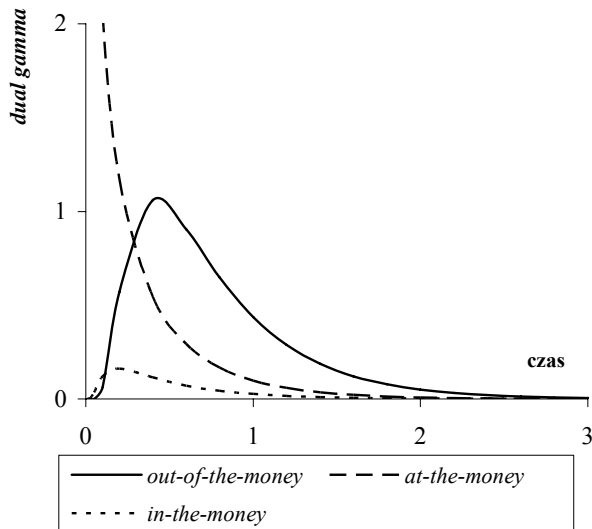
Źródło: opracowanie własne.

Rys. 3. Zależności współczynnika *dual gamma* od ceny S dla opcji *call* i *put*



Źródło: opracowanie własne.

Rys. 4. Zależności współczynnika *dual gamma* od czasu τ dla opcji *call* i *put*



Źródło: opracowanie własne.

Podsumowanie

Do zarządzania ryzykiem opcji nie wystarczy zbadać jedynie współczynniki *delta*, *gamma*, *theta*, *vega* i *rho*. W przypadku strategii opartych na tych parametrach należy pamiętać, że ich wartość zmienia się wraz ze zmianą ceny instrumentu podstawowego *S* oraz w wyniku tak zwanego starzenia się opcji, czyli wraz z upływem czasu. W zaawansowanych analizach konieczne jest stosowanie innych miar wrażliwości, takich jak *dual delta* czy *dual gamma*. W literaturze wymienia się jeszcze inne współczynniki, na przykład *beta*, *charm*, *colour*, *speed*, *volga* i *vanna*⁷. Skuteczność stosowania różnorodnych strategii opcyjnych jest uzależniona od prawidłowego odczytania wpływu poszczególnych parametrów na wartość opcji. Konieczna jest zatem analiza wszystkich współczynników wrażliwości.

Literatura

1. *Foreign Exchange Risk: Models, Instruments and Strategies*, red. J. Hakala, U. Wystup, Risk Books, London 2002.
2. Hull J., *Kontrakty terminowe i opcje. Wprowadzenie*, WIG Press, Warszawa 1999.
3. Jajuga K., Kuziak K., Markowski P., *Inwestycje finansowe*, Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej we Wrocławiu, Wrocław 1998.
4. Korona R.M., *Niedoceniana reszta*, „Bank” 1999, nr 7.
5. *Metody ekonometryczne i statystyczne w analizie rynku kapitałowego*, red. K. Jajuga, Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej we Wrocławiu, Wrocław 2000.
6. Stolorz B., *Analiza współczynnika rho w modelu wyceny opcji Garmana-Kohlhagena*, w: *Rynek kapitałowy. Skuteczne inwestowanie*, cz. II, red. W. Tarczyński, Wydawnictwo Naukowe Uniwersytetu Szczecińskiego, Szczecin 2007.
7. Stolorz B., *Volga i vanna – współczynniki wrażliwości*, w: *Inwestowanie na rynku kapitałowym*, red. W. Tarczyński, Studia i Prace Wydziału Nauk Ekonomicznych i Zarządzania nr 10, Uniwersytet Szczeciński, Szczecin 2008.
8. Wilmott P., Howison S., Dewynne J., *The Mathematics of Financial Derivatives*, Cambridge University Press, Cambridge 1999.

⁷ Więcej na ten temat zob. [1], s. 3–14.

DUAL DELTA AND DUAL GAMMA – SENSITIVITY MEASURES

Summary

In practice it is claimed that studying parameters: delta, gamma, theta, vega and rho is sufficient to manage option risk. However in case of strategies created on the basis of these parameters one should remember that their value changes with the change of price of underlying instrument S and also due to the so called “ageing” of option, meaning the change with time. Hence, there is a need to apply in advanced analyses other sensitivity measures. The aim of this study is to present two less known sensitivity parameters: *dual delta* and *dual gamma* of European call option and put option for the model of pricing of Black-Scholes.

Translated by Beata Stolorz

