

**STUDIA I PRACE WYDZIAŁU NAUK EKONOMICZNYCH
I ZARZĄDZANIA NR 1**

MAGDALENA KISIELEWSKA

**POJĘCIE EFEKTYWNOŚĆ
W METODACH ANALIZY GRANICZNEJ**

Wprowadzenie

Rozważania ekonomistów na temat efektywności najczęściej sprowadzają się do efektywności skali i zakresu (ang. *scale and scope economies*), które dotyczą albo wyboru efektów działania firmy (przy danych nakładach), albo „efektywności typu X” (ang. *X-efficiency*), odnoszącej się do stopnia wykorzystania nakładów (dla osiągnięcia danych efektów). Wybitni ekonomiści P.A. Samuelson i W.D. Nordhaus głoszą nawet pogląd, że efektywność jest być może głównym przedmiotem ekonomii i – najogólniej rzecz ujmując – jest ona brakiem marnotrawstwa. Według tych autorów, gospodarka funkcjonuje efektywnie, jeśli nie można zwiększyć produkcji jednego dobra bez zmniejszenia produkcji innego, co jest jednoznaczne z osiągnięciem krawędzi możliwości produkcyjnych¹.

W artykule przedstawiono wymienione kategorie efektywności wykorzystywane w metodach analizy granicznej. Omówiono także podstawy matematyczne pomiaru efektywności przy wykorzystaniu najpopularniejszej z tych metod – *Data Envelopment Analysis* (DEA).

¹ P.A. Samuelson, W.D. Nordhaus: *Ekonomia*. T. 1. PWN, Warszawa 1995, s. 185.

1. Ekonomia skali i zakresu

Przyjmuje się, że firma osiąga korzyści skali (ang. *scale economies*), jeśli wzrostowi efektów jej działania towarzyszy proporcjonalnie niższy przyrost nakładów (kosztów), co oznacza, że firma może działać efektywniej przez zwiększanie poziomu produkcji (skali). Za firmę działającą w obszarze dysekononii skali (ang. *scale diseconomies*) uważa się taką, w której obniżenie produkcji (efektów) powoduje wyższe niż proporcjonalne obniżenie kosztów, a więc firma ta może być bardziej efektywna, jeśli ograniczy skalę działania.

Efektywność zakresu (ang. *scope efficiency*) dotyczy takich przypadków, gdy firma produkuje najbardziej efektywny pod względem kosztów zestaw (mix) produktów. Dla danego poziomu efektów jednostkowy koszt produkcji może być niższy, jeśli firma produkuje cały zakres (asortyment) produktów, niż jeśli specjalizowałaby się w kilku z nich, albo odwrotnie – może się okazać, że koszty będą jednak niższe w przypadku specjalizacji. W pierwszym przypadku mówimy o **ekonomii zakresu** (ang. *scope economies*), w drugim – o **dysekononii zakresu** (ang. *scope diseconomies*)². Ekonomia skali i zakresu są wzajemnie powiązane – fakt, że firma produkuje wyroby lub świadczy różnego typu usługi (szeroki zakres produkcji) pozwala jej na zwiększenie skali działania. Oczywiście, przekroczenie określonego zakresu działania zwiększy koszty jednostkowe.

2. Efektywność typu X

Efektywność typu X bada, czy firma wykorzystuje zasoby (nakłady) pozostające do jej dyspozycji, takie jak praca, ziemia, kapitał, w najbardziej efektywny pod względem kosztów sposób – to znaczy, czy dany poziom i zestaw efektów jest wytwarzany w możliwie najtańszy sposób³. Jeśli nie, to firma albo nie wykorzystuje części swoich zasobów, albo stosuje nieodpowiednią ich

² L.J. Mester: *How Efficient are Third District Banks*. *Business Review*. Federal Reserve Bank of Philadelphia, January 1994, s. 3–18.

³ Por. formułę oszczędnościową zasady racjonalnego gospodarowania O. Langego: *Ekonomia polityczna*. T. I, II. PWN, Warszawa 1980, s. 147; T. Kotarbiński: *Traktat o dobrej robocie*. Ossolineum, Łódź 1955, s. 117.

kombinację do wytwarzania danego poziomu efektów. Można wyróżnić kolejne dwie kategorie efektywności, związane z efektywnością typu X, a mianowicie:

- a) nieefektywność techniczną, określaną także mianem „czystej” nieefektywności technicznej (ang. *technical* albo *technological inefficiency*, albo *ratio inefficiency*, albo *purely technical inefficiency*⁴);
- b) nieefektywność alokacyjną (ang. *allocative inefficiency* albo *mix inefficiency*).

Nieefektywność techniczna sprowadza się do wykorzystywania zbyt wielu nakładów do wytworzenia danych efektów i oznacza po prostu marnotrawstwo. W mikroekonomicznej teorii firmy przedsiębiorstwo nieefektywne z technicznego punktu widzenia produkuje poniżej granicy możliwości produkcyjnych. Marnotrawstwo zasobów nie jest jednak jedynym przejawem nieefektywności typu X. Jej drugim rodzajem jest nieefektywność alokacyjna, występująca wtedy, gdy nakłady na wytworzenie danego poziomu (skala) i zestawu (zakres) efektów są użyte przez firmę w niewłaściwych proporcjach⁵. Firma nieefektywna alokacyjnie znajduje się na granicy możliwości produkcyjnych, to znaczy dla wybranych nakładów maksymalizuje osiągnięte efekty, ale mogłaby obniżyć koszty działania przez wybranie innych proporcji zużywanych nakładów.

Oczywiście, firma może być zarówno nieefektywna technicznie (technologicznie) jak i alokacyjnie. Jednoczesne występowanie efektywności technicznej i alokacyjnej oznacza, że firma jest efektywna w pełnym tego słowa znaczeniu, co jest nazywane efektywnością ogólną lub całkowitą w sensie efektywności Pareto-Koopmansa (ang. *overall* lub *total efficiency*), utożsamianą z efektywnością ekonomiczną⁶.

Pomiar poszczególnych kategorii efektywności mikroekonomicznej odbywa się za pomocą sformalizowanych modeli matematycznych bądź ekonometrycznych, odnoszących się odpowiednio do następujących funkcji celu: kosztów, przychodów i zysków. Wymienionym funkcjom celu odpowiadają następujące kategorie efektywności mikroekonomicznej: efektywność kosztowa

⁴ Ta kategoria efektywności zwana jest także „słabą” efektywnością (ang. *weak efficiency*) albo efektywnością Farrella (ang. *Farrell's efficiency*). Por. punkt 3.

⁵ Makroefektywność alokacyjna (gospodarki) oznacza, że przy danych zasobach i technice gospodarka dostarcza konsumentom możliwie największy zestaw dóbr.

⁶ Każda z kategorii efektywności mikroekonomicznej odnosi się do efektywności całkowitej i jednocześnie każdą z nich można rozłożyć na składowe efektywności całkowitej, tj. efektywność techniczną i alokacyjną. Por. S. Grosskopf: *Some Remarks on Productivity and Its Decompositions*. „Journal of Productivity Analysis” 2003, No 20, s. 459–474.

(ang. *cost efficiency*), efektywność przychodowa (ang. *revenue efficiency*) i efektywność zysku (ang. *profit efficiency*). Po oszacowaniu danej funkcji granicznej pomiar poziomu efektywności badanej firmy (obiektu) odbywa się przez porównanie jej z firmą (obiektom) uznaną za efektywną i będącą wzorcem efektywności.

Modele matematyczne wykorzystują nieparametryczne metody analizy granicznej: *Data Envelopment Analysis* (DEA) oraz *Free Disposal Hull* (FDH), natomiast modele ekonometryczne są podstawą parametrycznych metod pomiaru efektywności, do których zalicza się: *Stochastic Frontier Approach* (SFA), *Distribution Free Approach* (DFA), *Thick Frontier Approach* (TFA). Najpopularniejsza jest metoda DEA⁷. Jej założenia przedstawiono poniżej.

3. Założenia metody DEA

DEA jest metodą deterministyczną opartą na programowaniu liniowym. Ponieważ może być stosowana do szacowania efektywności różnych podmiotów – od firm komercyjnych, po instytucje *non-profit* czy gospodarki państw i regionów, podmioty poddane analizie powszechnie nazywa się jednostkami decyzyjnymi (ang. *Decision Making Units* – DMUs). Efektywność obiektu (DMU) jest mierzona w stosunku do innych obiektów z badanej grupy, uznanych za efektywne, a zatem tworzących granicę efektywności.

DEA opiera się na koncepcji produktywności opracowanej przez G. Debreu⁸ i M.J. Farrella⁹, którzy produktywność zdefiniowali jako stosunek pojedynczego wyniku do pojedynczego nakładu:

$$\frac{\text{efekt}}{\text{nakład}} \quad (1)$$

⁷ Przeprowadzone przez A.N. Bergera i D.B. Humphrey'a badania wykorzystania metod analizy granicznej do pomiaru efektywności instytucji finansowych wykazały, że najczęściej stosowana jest DEA (69 na 129 przeanalizowanych przez nich badań). Zob. A.N. Berger, D.B. Humphrey: *Efficiency of Financial Institutions: International Survey and Directions for Future Research*. „European Journal of Operational Research” 1997, No 98, s. 175–212. DEA jest również najpopularniejsza w Polsce (6 na 8 badań). Zob. M. Kisielewska: *Charakterystyka wybranych metod pomiaru efektywności bazujących na krzywych efektywności*. Prace Naukowe Akademii Ekonomicznej, Wrocław 2005, s. 150–158.

⁸ G. Debreu: *The Coefficient of Recourse Utilisation*. „Econometrica” 1951, No 19 (3), July, s. 273–292.

⁹ M.J. Farrell: *The Measurement of Productive Efficiency*. „Journal of the Royal Statistical Society, Series A” 1957, No 120(III), s. 253–281.

Ujęcie to zostało rozszerzone przez A. Charnesa, W.W. Coopera i E. Rhodesa na sytuację wielowymiarową, w której występuje wiele efektów i wiele nakładów. Należy podkreślić, że miara efektywności zaproponowana przez M.J. Farrella odnosi się jedynie do „czystej” efektywności technicznej, czyli wskazuje, czy badany obiekt znajduje się na krzywej możliwości produkcyjnych, czy nie. Nie mierzy natomiast efektywności alokacyjnej, czyli nie określa, czy obiekt znajdujący się na granicy możliwości produkcyjnych stosuje nakłady we właściwych proporcjach do wytworzenia danego poziomu i zestawu efektów. Miara ta zwana jest także „słabą” efektywnością (ang. *weak efficiency*)¹⁰. J.M. Farrell był świadomy tego ograniczenia i podejmował próby jego przezwyciężenia, ale ostatecznie nie podał formuły matematycznej. Udało się to dopiero A. Charnesowi, W.W. Cooperowi i E. Rhodesowi. Zaproponowane przez nich formuły matematyczne mierzą także efektywność alokacyjną, pozwalając tym samym na określenie efektywności całkowitej¹¹.

Efektywność całkowita jest odnoszona do efektywności Pareta-Koopmansa¹². Przypuśćmy, że w danej branży działa K firm zużywających $x_j \in R_+^N$ nakładów na produkcję $y_j \in R_+^M$ wyników. Technologia produkcji, która transformuje nakłady na wyniki, może być określona przez zbiór możliwości produkcyjnych:

$$P(x) = \{y : y \text{ może być produkowane przez } x\}. \quad (2)$$

¹⁰ Zob. W.W. Cooper, L.M. Seiford, K. Tone: *Data Envelopment Analysis. A Comprehensive Text with Models, Applications, Reference and DEA Solver Software*. Kluwer Academic Publishers, Nowell, Massachusetts 2000, s. 45–46.

¹¹ Więcej na temat podstaw DEA zob. m.in. w A. Charnes, W.W. Cooper: *Preface to Topics in Data Envelopment Analysis*. „Annals of Operations Research” 1985, 2, s. 59–94; T. Coelli, D.S.P. Rao, G.E. Battese: *An Introduction to Efficiency and Productivity Analysis*. Kluwer Academic Publishers, Boston 1998; G. Hanoch, M. Rothschild: *Testing the Assumptions of Production Theory. A Nonparametric Approach*. „Journal of Political Economy” 1972, No 80(2), s. 256–275.

¹² Zob. *Handbook on Data Envelopment Analysis*. Red. W.W. Cooper, L.M. Seiford, J. Zhu. Kluwer Academic Publishers, Boston–Dordrecht–London 2004, s. 3–4; T.C. Koopmans: *Activity Analysis of Production and Allocation*. Wiley, New York 1957.

Przy danych empirycznych punktach (x_j, y_j) , $j = 1, 2, 3, K$, $x_j \geq 0$ i $y_j \geq 0$, empiryczny zbiór możliwości produkcyjnych zdefiniowany jest jako wypukła otoczka tych punktów¹³:

$$P(x) = \left\{ (X, Y): X = \sum_{j=1}^K x_j \mu_j, Y = \sum_{j=1}^K y_j \mu_j, \forall \mu_j \geq 0, \sum_j \mu_j = 1 \right\} \quad (3)$$

gdzie:

- K – liczba firm,
- y_j – wektor $(1 \times m)$ wyników j -ej firmy,
- x_j – wektor $(1 \times n)$ nakładów j -ej firmy,
- Y – macierz $(M \times K)$ wyników,
- X – macierz $(N \times K)$ nakładów.

Zgodnie z definicją efektywności Pareto-Koopmansa, dla skończonego empirycznego zbioru możliwości produkcyjnych efektywny jest punkt (x_i, y_i) , taki że nie ma innego punktu (x_j, y_j) w tym zbiorze, takiego że $y_j \geq y_i$ oraz $x_j \leq x_i$ dla każdego $i, j = 1, 2, \dots, K$, z zachodzącą przynajmniej jedną ostrą nierówność. Innymi słowy, oznacza to, że produkcja danej jednostki jest efektywna, jeżeli nie ma w danym sektorze innej jednostki, która produkuje tyle samo lub więcej i zużywa mniej nakładów.

Po wyodrębnieniu punktów efektywności Pareto ze zbioru K punktów empirycznych można zdefiniować empiryczną funkcję produkcji jako krawędź (ang. *frontier*) zbioru możliwości produkcyjnych¹⁴. Naturalną miarą nieefektywności danej firmy jest zatem jej odległość między punktem empirycznym charakteryzującym technologię firmy (x_j, y_j) a empiryczną funkcją produkcji (krawędzią zbioru możliwości produkcyjnych). Miarę taką zaproponował R.W. Shepard¹⁵. Jego funkcja odległości ma następującą postać:

¹³ Przedstawiona definicja empirycznego zbioru możliwości produkcyjnych jest jedną z wielu możliwych. Inne definicje możliwości produkcyjnych przedstawili A. Charnes, W.W. Cooper, B. Golany, L. Seiford, J. Stutz: *Foundations of Data Envelopment Analysis for Pareto-Koopmans Efficient Empirical Production Functions*. „Journal of Econometrics” 1985, No 30(1/2), s. 91–107.

¹⁴ *Ibidem*.

¹⁵ R.W. Shepard: *Cost and Production Functions*. Princeton University Press, Princeton 1953; R. Färe, S. Grosskopf, C.A.K. Lovell: *Production Frontiers*. Cambridge University Press, Cambridge 1994.

$$D_j(x_j, y_j) = \min \left\{ \theta : \frac{y_j}{\theta}, y_j \in P(x) \right\} \quad (4)$$

gdzie:

- D_j – funkcja odległości między punktem empirycznym charakteryzującym technologię firmy (x_j, y_j) a empiryczną funkcją produkcji (krawędzią zbioru możliwości produkcyjnych),
- y_j – wektor $(1 \times m)$ wyników j -ej firmy,
- x_j – wektor $(1 \times n)$ nakładów j -ej firmy,
- θ – współczynnik efektywności obiektu,
- $P(x)$ – zbiór możliwości produkcyjnych.

Funkcja ta jest kompletną skalarną charakterystyką technologii danej firmy. Wartość funkcji odległości zawiera się w przedziale zero–jeden, jeżeli tylko analizowany punkt należy do zbioru możliwości produkcyjnych $P(x)$. Wartość funkcji równa jeden wskazuje na efektywność firmy, a mniejsza niż jeden oznacza jej nieefektywność.

R. Fare, S. Grasskopf, K. Lovell¹⁶ udowodnili, że funkcja odległości Sheparda jest odwrotnością miary efektywności technicznej zaproponowanej przez J.M. Farrella $F(x_j, y_j)$, określonej przez rozwiązanie zadania programowania liniowego modelu *Data Envelopment Analysis* postaci:

$$[D_j(x_j, y_j)]^{-1} = F(x_j, y_j) = \max \{ \theta : \theta y_j, y_j \in P(x) \} \quad (5)$$

Wartość miary efektywności technicznej Farrella pokazuje, o ile trzeba średnio zwiększyć produkcję firmy, aby była ona efektywna przy tej samej wielkości użytych nakładów. Jak wspomniano, efektywność Farrella to tak zwana słaba efektywność, która nie ujmuje pomiaru efektywności alokacyjnej. Pomiar ten umożliwili A. Charnes, W.W. Cooper i E. Rhodes przez dualne zagadnienie programowania liniowego (ang. *dual linear programming* – DLP), które można przedstawić następująco¹⁷:

¹⁶ *Ibidem*.

¹⁷ I.A. Ali: *Computational Aspects of DEA*. W: *Data Envelopment Analysis. Theory, Methodology and Applications*. Red. A. Charnes, W.W. Cooper, A.Y. Lewin, L.M. Seiford. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht 1995, cyt. za *Analiza i ocena banków oraz ich oddziałów*. Red. A. Gospodarowicz. Wyd. Akademii Ekonomicznej we Wrocławiu, Wrocław 2002, s. 59–60. Por. W.W. Cooper, L.M. Seiford, K. Tone: *op.cit.*, s. 43–46, 53–58; *Handbook on Data...*, s. 11–19.

$$\min_{\theta, \lambda, s^+, s^-} z_0 = \theta - \varepsilon \cdot \sum_{r=1}^s s_r^+ - \varepsilon \cdot \sum_{i=1}^m s_i^- \quad (6)$$

przy ograniczeniach:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \lambda_j Y_j - s^+ &= Y_0, \\ \theta X_0 - \sum_{j=1}^n \lambda_j Y_j - s^- &= 0, \\ \lambda_j, s_r^+, s_i^- &\geq 0. \end{aligned}$$

Tak sformułowane zadanie programowania liniowego należy rozwiązać względem wszystkich n obiektów. W zagadnieniu tym rozwiązywanym względem obiektu 0_0 :

- X_0 jest wektorem nakładów danego obiektu (o wymiarach [1 x m]),
- X jest macierzą nakładów wszystkich obiektów (o wymiarach [n x m]),
- Y_0 jest wektorem efektów danego obiektu (o wymiarach [1 x s]),
- Y jest macierzą efektów wszystkich obiektów (o wymiarach [n x s]),
- $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ są współczynnikami kombinacji liniowej,
- θ jest współczynnikiem efektywności obiektu,
- s^+ oraz s^- określają wartość tak zwanych luzów, powstałych w trakcie optymalizacji funkcji celu,
- stała ε oznacza nieskończenie małą liczbę (w pierwotnym sformułowaniu rozwiązywanego problemu odgrywa ona rolę dolnego ograniczenia wag określających wartość poszczególnych efektów i nakładów, tak by zapobiec przyjmowaniu przez nie zerowych wartości).

Przedstawiony model jest w literaturze określany mianem zorientowanego na nakłady (ang. *input oriented*) modelu CCR¹⁸, w którym funkcją celu jest minimalizacja nakładów na uzyskanie niezmięnionej wartości efektów. Drugą

¹⁸ Skrót od nazwisk autorów modelu: Charnesa, Coopera i Rhodesa.

grupę tworzą modele zorientowane na efekty (ang. *output-oriented*), w których przy danych nakładach maksymalizowane są efekty¹⁹.

W modelu dualnym DEA występują dodatkowe parametry s^+ oraz s^- , które określają wartość luzów powstających w trakcie optymalizacji funkcji celu²⁰. Model DEA jest bowiem rozwiązywany w dwóch etapach²¹ – w pierwszym dokonuje się minimalizacji wartości θ , a w drugim minimalizacji wartości luzów (s^+ oraz s^-) przy stałej wartości θ , obliczonej w pierwszym kroku. Łącząc przedstawione równanie dualnego programowania liniowego (DLP) z przywołaną definicją efektywności Pareto-Koopmansa, można powiedzieć, że obiekt (DMU) jest w pełni efektywny wtedy i tylko wtedy, gdy²² $\theta = 1$ oraz $s_i^- = s_r^+ = 0$. W praktyce szacowania efektywności DEA z reguły wykorzystuje się specjalistyczne oprogramowanie rozwiązujące poszczególne zagadnienia programowania liniowego i szacowanie parametrów luzów (s^+ oraz s^-) nie jest istotne z punktu widzenia użytkownika²³.

Podsumowując, dany obiekt (DMU) jest uznany za w pełni efektywny (ang. *fully efficient*) w sensie Pareto-Koopmansa, jeśli:

- a) znajduje się na granicy możliwości produkcyjnych i współczynnik jego efektywności $\theta = 1$ (100%), a zatem dany obiekt jest efektywny technicznie, oraz
- b) używa właściwych proporcji nakładów i efektów ($s_i^- = s_r^+ = 0$), a zatem dany obiekt jest efektywny alokacyjnie.

Obiekty (DMU), dla których współczynnik efektywności wynosi 1 (tj. 100%), leżą na krzywej efektywności i tworzą granicę efektywności²⁴, natomiast jednostki leżące poniżej krzywej – określane jako nieefektywne – będą miały współczynnik efektywności mniejszy od jedności.

¹⁹ Por. zasadę racjonalnego gospodarowania.

²⁰ Zob. *Analiza i ocena banków...*, s. 59.

²¹ Stąd określenie model dualny.

²² *Handbook on Data...*, s. 11.

²³ Opis i podstawy matematyczne programowania liniowego (LP) można znaleźć w bogatej literaturze przedmiotu. Zob. m.in. W.W. Cooper, L.M. Seiford, K. Tone: *op.cit.*; *Handbook on Data...*, I. Nykowski: *Programowanie liniowe*. PWE, Warszawa 1984.

²⁴ W niektórych sytuacjach obiekt leżący na krzywej efektywności może mimo wszystko być określony jako nieefektywny. Na tej podstawie powstało pojęcie tzw. obiekt graniczny. Zob. A. Charnes, W.W. Cooper, Z.M. Huang, D.B. Sun: *Polyhedral Cone-Ratio DEA Models*. „Journal of Econometrics” 1990, No 46, s. 73–91; L.M. Seiford, R.M. Thrall: *Recent Developments in DEA. The Mathematical Programming Approach to Frontier Analysis*. „Journal of Econometrics” 1990, No 46, s. 7–38.

Zakończenie

W artykule nie wyczerpano złożonych zagadnień związanych z definiowaniem i pomiarem efektywności. Przedstawiono jedynie coraz popularniejsze podejście do pomiaru efektywności, jakim jest analiza graniczna i wykorzystywane w niej kategorie efektywności. W metodach analizy granicznej pomiar efektywności odbywa się za pomocą sformalizowanych modeli matematycznych lub ekonometrycznych. Pierwsze z nich wykorzystują metody nieparametryczne: *Data Envelopment Analysis* (DEA) oraz *Free Disposal Hull* (FDH), drugie – metody parametryczne: *Stochastic Frontier Approach* (SFA), *Distribution Free Approach* (DFA), *Thick Frontier Approach* (TFA). Najczęściej stosowana jest metoda DEA, której założenia przedstawiono w artykule.

EFFICIENCY CONCEPT IN FRONTIER ANALYSIS**Summary**

The paper provides basics of the efficiency concepts employed in frontier analyses. These analyses are being conducted by researchers and practitioners by the means of two approaches: nonparametric – using *Data Envelopment Analysis* (DEA) and *Free Disposal Hull* (FDH) and parametric: *Stochastic Frontier Approach* (SFA), *Distribution Free Approach* (DFA) and *Thick Frontier Approach* (TFA). Fundamentals of most commonly used method – DEA are also given.

Translated by Magdalena Kisielewska